Université Lille1

Master 1 enseignement 2012/2013
Analyse 2 – Feuille 3

3 Séries de Fourier

Le « noyau de Dirichlet » est systématiquement employé dans le contexte des séries de Fourier pour les fonctions 2π-périodiques :

$$D_N(t) = 1 + 2\sum_{n=1}^{N}\cos(nt) = \sum_{n=-N}^{n=N} e^{int} .$$

On note $S_N(f)$ la N^e somme partielle de la série de Fourier d'une fonction f :

$$S_N(f)(t) = \sum_{n=-N}^{n=+N} c_n(f)e^{int} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{N}\Big(a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt)\Big) .$$

C'est la projection orthogonale de f sur les polynômes trigonométriques de degrés au plus N, lorsque l'on utilise le produit scalaire $(f, g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt$. Pour le moment nous travaillons avec des fonctions à valeurs réelles.

3.1 Rappeler les formules pour les coefficients de Fourier $a_n(f)$ $(n \geqslant 0)$ et $b_n(f)$ $(n \geqslant 1)$. Simplifier ces formules lorsque f est paire, ou impaire.

3.2 Montrer l'identité fondamentale $D_N(t) = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{1}{2}t)}$. Que valent $D_N(0)$, $\int_0^{2\pi} D_N(t)\,dt$ et $\int_0^{2\pi} D_N(t)^2\,dt$?

3.3 Montrer, pour toute fonction f Riemann-intégrable 2π-périodique :

$$S_N(f)(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_N(x_0 - t)f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} D_N(t)(f(x_0 + t) + f(x_0 - t))\,dt$$

3.4 (Théorème de convergence ponctuelle « de Dirichlet ») Déduire du résultat précédent et de l'exercice 1.7 que l'on a

$$\lim_{N\to\infty} S_N(f)(x_0) = \frac{1}{2}\Big(f(x_0^+) + f(x_0^-)\Big)$$

dès que f admet des limites à droite et à gauche en x_0 et aussi (en un sens que l'on précisera) des dérivées à droite et à gauche en ce même point.

3.5 Soit f une fonction 2π-périodique, continue, affine par morceaux : sur $[x_{j-1}, x_j]$, $1 \leqslant j \leqslant M$, $x_0 = 0$, $x_M = 2\pi$, on a $f' = \lambda_j$ constant. On pose $\lambda_{M+1} = \lambda_1$.

Prouver pour $n \geqslant 1$:

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi n^2} \sum_{1\leqslant j\leqslant M} (\lambda_j - \lambda_{j+1}) \cos(nx_j) \qquad b_n(f) = \frac{1}{\pi n^2} \sum_{1\leqslant j\leqslant M} (\lambda_j - \lambda_{j+1}) \sin(nx_j)$$

En utilisant le Théorème de convergence de Dirichlet, montrer qu'il existe une certaine constante K dépendant des λ_i et telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall N \geqslant 1 \quad \left| f(x) - S_N(f)(x) \right| \leqslant \frac{K}{N}\,.$$

3.6 (Approximation en norme L^2 et Identité de Parseval) Déduire de l'exercice précédent que l'identité de Parseval est valable pour les fonctions continues affines par morceaux ; puis pour la fonction « créneau » (2π pér. bien sûr) valant 0 sur $]0\,,a[$, C sur $]a\,,b[$, et 0 sur $]b\,,2\pi[$, pour certains $0 \leqslant a < b \leqslant 2\pi$ et $C \in \mathbb{R}$; puis pour toutes les fonctions en escaliers, puis pour toutes les fonctions Riemann-intégrables (2π-périodiques). Autrement dit rédiger les détails des arguments donnés par le Professeur lors de son cours.

3.7 (Fonctions T-périodiques) Soit $T > 0$. On pose $\omega = \frac{2\pi}{T}$, puis $u_n(t) = \cos(n\omega t)$, $v_n(t) = \sin(n\omega t)$, montrer qu'elles sont T-périodiques. Comment définissez-vous le produit scalaire pour que les u_n ($n \geqslant 0$) et les v_n ($n \geqslant 1$) vérifient les mêmes relations d'orthogonalité que pour $T = 2\pi$, $\omega = 1$? Comment s'écrivent les formules de Fourier et l'identité de Bessel-Parseval ?

3.8 Justifier de deux manières l'identité suivante, en vérifiant au passage le célèbre résultat dû à Euler $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \frac{1}{6}\pi^2$: d'une part par le Théorème de Dirichlet de convergence ponctuelle, d'autre part par l'identité de Parseval pour des fonctions bien choisies.

$$0 \leqslant x \leqslant \pi \implies \sum_{n=1} \frac{\sin^2(nx)}{n^2} = \frac{x(\pi - x)}{2}$$

3.9 Soit $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1,+1\}$. Déterminer (en distinguant soigneusement $|r| < 1$ de $|r| > 1$) les séries de Fourier des fonctions 2π-périodiques :

$$P_r(t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(t) + r^2}$$

On pensera (si $r \neq 0$) à utiliser $1 - 2r\cos(t) + r^2 = (1-z)(1-r^2z^{-1})$ avec $z = re^{it}$. Que valent, comme fonctions de $A, B > 1$ (ou de $r = e^{-u}, s = e^{-v}$ avec $u, v > 0$

choisis tels que $\mathrm{ch}(u) = A$ et $\mathrm{ch}(v) = B$) les intégrales :

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(A-\cos(t))^2}\ , \qquad \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(B-\sin(t))^2}\ , \qquad \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(A-\cos(t))(B-\sin(t))}\ ?$$

3.10 Soit $r \in]-1\,,+1[$ et $t \in \mathbb{R}$. Montrer (par le calcul des dérivées par rapport à t ou via un logarithme complexe) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n \sin(nt)}{n} = \mathrm{Arctg}\Big(\frac{r\sin(t)}{1-r\cos(t)}\Big)$$

En déduire (en invoquant le Théorème d'Abel pour le passage à la limite) la somme de la série lorsque $r = \pm 1$. Et que vaut $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n \cos(nt)}{n}$? Et pour $r = \pm 1$? Et est-ce alors la série de Fourier d'une fonction Riemann-intégrable ?

4 Produits scalaires et séries de Fourier complexes

4.1 Rappeler les formules pour les coefficients de Fourier $c_n(f)$, $n \in \mathbb{Z}$. Exprimer les c_n en fonction des a_n, b_n, et réciproquement. Rappeler comment s'exprime l'identité de Parseval avec les $c_n(f)$. Que vaut (f, g) en fonction des $c_n(f)$ et des $c_n(g)$? Que vaut, en fonction de ces mêmes coefficients

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt\ ?$$

Et en fonction des a_n et b_n ?

4.2 Soit f la fonction 2π-périodique définie par $f(t) = i(\pi - t)$ sur $[0\,, 2\pi[$.

(a) Montrer $c_n(f) = \frac{1}{n}$ pour $n \geqslant 1$. Déterminer aussi $c_n(f)$ pour $n \leqslant 0$.

(b) Soit $a_1, \dots, a_n$ des nombres complexes ; montrer :

$$\sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} \frac{a_j a_k}{j+k-1} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_j e^{-ijt}\Big)^2 e^{it} f(t)\,dt\ .$$

(c) En déduire l'inégalité de Hilbert :

$$\Big|\sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} \frac{a_j a_k}{j+k-1}\Big| \leqslant \pi \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2\ .$$

4.3 Soit f une fonction 2π-périodique, de classe C^1 par morceaux, et soit g la fonction définie par $g(x) = f'(x)$ aux points de dérivabilité de f et par $g(x) = 0$ ailleurs. Comment reliez-vous les coefficients de Fourier de f et ceux de g ? et si f est supposée, de plus, continue ?

4.4 Soit f continue, telle que $\forall K \geqslant 1$ $a_n(f), b_n(f) = O(n^{-K})$. Montrer que f est infiniment dérivable. Et si f est supposée continue par morceaux ?

4.5 On admettra $|\sqrt{2} - \frac{p}{q}| > \frac{1}{3q^2}$ pour $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

(i) Établir : $\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ $\left|e^{2\pi i n\sqrt{2}} - 1\right| > \dfrac{4}{3\,|\,n\,|}$.

(ii) Soit g une fonction continue 1-périodique. Soit f une fonction Riemann intégrable sur $[0, 1]$, 1-périodique, et vérifiant

$$(*) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x + \sqrt{2}) - f(x) = g(x)$$

Que peut-on dire des coefficients de Fourier de f ?

(iii) Soit g une fonction 1-périodique de classe C^∞. Déterminer sous quelle condition sur g il existe une fonction 1-périodique R-intégrable sur $[0, 1]$ et vérifiant $(*)$. Montrer que toutes les solutions continues par morceaux sont de classe C^∞.

4.6 Soit H un espace préhilbertien complexe de dimension infinie, et soit $(x_i)_{i\geqslant 1}$ une suite dans H avec $\|x_i\| = 1$ pour tout i, et vérifiant

$$\exists C \geqslant 0 \qquad i \neq j \implies \|x_i - x_j\| \geqslant C\,.$$

Montrer

$$N(N-1)C^2 \leq \sum_{1\leq i,j\leq N} \|x_i - x_j\|^2 \leq \sum_{1\leq i,j\leq N} (\|x_i\|^2 + \|x_j\|^2) = 2N^2\,,$$

et en déduire $C \leqslant \sqrt{2}$. Peut-on avoir $C = \sqrt{2}$?

4.7 Soit F un espace vectoriel de fonctions continues sur $[0, 1]$, sur lequel les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes : il existe $K < \infty$ tel que $\|f\|_\infty \leqslant K\|f\|_2$ pour toute $f \in F$ (dans l'autre sens, on a de manière évidente $\|f\|_2 \leqslant \|f\|_\infty$).

(A) Soit $f_1, f_2, \ldots, f_n$ un système orthonormé fini de F. Montrer pour tous $t \in [0, 1]$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{C}$:

$$|\lambda_1 f_1(t) + \cdots + \lambda_n f_n(t)| \leqslant K \cdot (\,|\,\lambda_1\,|^2 + \cdots + |\,\lambda_n\,|^2)^{1/2}$$

(B) Montrer par un bon choix des λ_i :

$$\forall t \in [0, 1],\ \ |\,f_1(t)\,|^2 + \cdots + |\,f_n(t)\,|^2 \leqslant K \cdot (\,|\,f_1(t)\,|^2 + \cdots + |\,f_n(t)\,|^2)^{1/2}$$

(C) En déduire finalement $n \leqslant K^2$. Conclusion ?