Master 1 enseignement 2012/2013
Analyse 2 – Feuille 2

2 Espaces pré-hilbertiens (réels)

On travaille dans un espace préhilbertien réel H, qui peut être de dimension finie ou infinie (si la dimension est finie on parle d'espace euclidien). Le produit scalaire est noté $(\cdot\,,\cdot)$. La matrice de Gram de n vecteurs $v_1, \ldots,$ v_n est $G(\mathbf{v}) := \big((v_i\,,v_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Le gramien est le déterminant de la matrice de Gram, il est noté $g(\mathbf{v})$. Le premier exercice, et d'autres peut-être, auront probablement déjà été vus en cours.

2.1 Montrer que si le système $\mathbf{v}$ est lié, son gramien est nul. En utilisant un système orthonormé montrer que si $\mathbf{v}$ est libre, son gramien est non nul et même strictement positif (il s'agit de mettre $G(\mathbf{v})$ sous une forme ${}^tAA$).

2.2 Soit $X = (x_i)$ une colonne avec n entrées réelles : montrez la formule

$${}^tX \cdot G(\mathbf{v}) \cdot X = ||x_1v_1 + \cdots + x_nv_n||^2$$

En déduire une nouvelle preuve de l'implication $g(\mathbf{v}) = 0 \implies$ lié.

2.3 On se donne $n + m$ vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ et $w_1, \ldots, w_m$ et on suppose que les w_j sont des combinaisons linéaires $w_j = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} p_{ij}v_i$. On note P la matrice rectangulaire avec n lignes et m colonnes dont les entrées sont les p_{ij}, donc symboliquement $\mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot P$. Prouvez $\boxed{G(\mathbf{w}) = {}^tP \cdot G(\mathbf{v}) \cdot P}$. En déduire une relation de gramiens si $n = m$. Expliquez la formule symbolique $G(\mathbf{v}) = {}^t\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$.

2.4 Soit $v_1, \ldots, v_n$ des vecteurs linéairement indépendants et $V \subset H$ le sous-espace qu'ils engendrent. Soit x un vecteur de H et X la matrice colonne définie par $X_i = (x\,, v_i)$. Soit $y = \pi(x)$ sa projection orthogonale sur V et $Y = (y_i)$ la matrice colonne des coordonnées de $\pi(x)$ ($= y_1v_1+y_2v_2+\cdots+y_nv_n$). Exprimer X en fonction de Y et Y en fonction de X. Exprimer $d(x, V)$ en fonction de $g(v_1, \ldots, v_n, x)$ et de $g(v_1, \ldots, v_n)$. Montrer l'inégalité :

$$g(v_1, \ldots, v_n, x) \leqslant g(v_1, \ldots, v_n)g(x)$$

2.5 (suite) Montrer qu'il existe dans $V \subset H$ des vecteurs uniques $w_1, \ldots,$ w_n tels que la matrice $\big((w_i\,, v_j)\big)$ est la matrice identité. Quelle est la relation entre $G(\mathbf{w})$ et $G(\mathbf{v})$? Comment exprime-t-on π_V avec les w_j ?

2.6 (difficile) Montrer $\forall n, m \in \mathbb{N},\ \forall (v_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in H^n,\ \forall (w_j)_{1\leqslant j\leqslant m} \in H^m$:

$$g(v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_m) \leqslant g(v_1, \ldots, v_n)g(w_1, \ldots, w_m)$$

Ce n'est pas un exercice facile. Une méthode en ramène la difficulté à cette étape intermédiaire qui est intéressante en elle-même :

$$g(w_1,\dots,w_m) \geqslant g(\pi(w_1)\dots,\pi(w_m))\,,$$

quelle que soit la projection orthogonale π sur un sous-espace $W \subset H$.

2.7 Soit $H = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $(P\,,Q) = \int_0^\infty P(x)Q(x)e^{-x}\,dx$. Que valent les $(X^n\,,X^m)$? Calculez la matrice de Gram de 1, X, X^2 et son inverse. Déterminez la projection orthogonale $a + bX + cX^2$ de X^3 sur $\mathbb{R}\cdot 1 + \mathbb{R}\cdot X + \mathbb{R}\cdot X^2$ et aussi la valeur de $\left\|X^3 - a - bX - cX^2\right\|^2$.

2.8 Soit $H = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $(P\,,Q) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\,dx$. Que valent les $(X^n\,,X^m)$? Calculez la matrice de Gram de X, X^2, X^3, X^4 et son inverse. Déterminez la valeur des coefficients qui minimisent

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-\alpha t-\beta t^2-\gamma t^3-\delta t^4)^2\,dt$$

ainsi que la valeur de ce minimum. Donner un argument a priori qui implique $\alpha = \gamma = 0$.

Une note sur le cas hermitien

Supposons que le produit scalaire complexe $(v\,,w)$ soit défini comme étant linéaire en v et conjugué-linéaire en w. Il vaut alors mieux définir $G(\mathbf{v})$ par $\big((v_j\,,v_i)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ que par $\big((v_i\,,v_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ (dans le cas réel il n'y aurait pas de différence). Cela se voit à plusieurs choses.

2.9 Par exemple les formules des exercices 2.2 et 2.3 deviennent

$$X^* \cdot G(\mathbf{v}) \cdot X = \Big\|\sum_j x_j v_j\Big\|^2 \qquad G(\mathbf{w}) = P^* \cdot G(\mathbf{v}) \cdot P$$

ce qui utilise la notation usuelle $M^* := {}^t\overline{M}$ pour le conjugué hermitien. Mais que se passerait-il avec l'autre définition ?

2.10 Soit π la projection orthogonale sur un sous-espace V de dimension n de base $(v_1,\dots,v_n)$. Comment s'écrivent avec l'aide de $G(\mathbf{v})$ les coordonnées de $\pi(x)$ dans la base $\mathbf{v}$ de V ? et que se passe-t-il avec l'autre définition ?

2.11 On suppose maintenant que notre convention est que $(v\,,w)$ est conjugué linéaire en v et linéaire en w. Quel est alors le « bon » choix pour une matrice de Gram ?