Université Lille1

Master 1 enseignement 2012/2013
Analyse 2 – Feuille 1

1 Fonctions continues, fonctions intégrables

1.1 On considère la fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ sinon. Montrer que cette fonction n'est pas intégrable au sens de Riemann. Existe-t-il des points x en lesquels f est continue ?

1.2 On considère la fonction $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ telle que $g(x) = \frac{1}{q}$ si $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ sous forme irréductible, et $g(x) = 0$ sinon. En considérant des fonctions en escaliers majorant (et minorant) g, prouver que celle-ci est intégrable au sens de Riemann et que $\int_0^1 g(x)\,dx = 0$. Existe-t-il des points en lesquels g est continue ? plus précisément, quels sont les x en lesquels g est discontinue ?

1.3 La fonction g de l'exercice précédent est-elle continue par morceaux ? Quelle est la définition précise d'une fonction continue par morceaux

– sur un intervalle $[a, b]$?
– sur un intervalle $]a, b[$?
– sur la droite réelle toute entière ?

La fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ pour $x > 0$ et $f(0) = 0$ est-elle continue par morceaux sur l'intervalle $[0, 1]$?

1.4 Une fonction vérifiant $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ peut-elle être intégrable sur $[0, +\infty[$? Donner (ou plutôt construire/décrire) par contre des exemples de fonctions, positives, continues, ne vérifiant pas $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ mais néanmoins intégrables au sens généralisé sur $[0, \infty[$.

1.5 Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ intégrable (sous-entendu, au sens de Riemann généralisé). Montrer que la fonction $g : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ est, elle-aussi, intégrable au sens généralisé sur cet intervalle. Pour cet exercice (un exemple du critère de convergence dit de Abel-Dirichlet pour les intégrales impropres) on rappellera le critère de Cauchy pour l'existence d'une limite, et on pourra supposer f continue afin de faire des intégrations par parties appropriées. On évoquera la « seconde formule de la moyenne » pour le cas général.

1.6 Les intégrales de Riemann suivantes (de caractère « impropre », ou « généralisé » car sur un intervalle infini) sont de quels types : divergentes, semi-convergentes ou absolument convergentes ?

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x^2}\,dx,\ \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx,\ \int_0^\infty \frac{\cos(x)}{x}\,dx,\ \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\,dx,\ \int_0^\infty \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\,dx$$

1.7 (Dirichlet) Soit F une fonction intégrable au sens de Riemann sur $[0\,,b]$ ($b>0$). On examine l'intégrale

$$D(\lambda)=\int_0^b \frac{\sin(\lambda x)}{x}F(x)\,dx$$

lorsque $\lambda\to+\infty$. On suppose que $L=\lim_{x\to0}F(x)$ existe, et on redéfinit au besoin $F(0)$ via $F(0)=L$. En utilisant le Lemme de Riemann-Lebesgue avec par exemple $f(x)=\frac{F(x)-F(0)}{x}$, prouvez les « théorèmes de Dirichlet » [1] :

$$\begin{aligned}
&\textit{si } F'(0) \textit{ existe,} && \lim_{\lambda\to\infty}\int_0^b \frac{\sin(\lambda x)}{x}F(x)\,dx = F(0)\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx\\
&\textit{et, si } b<\pi, && \lim_{\lambda\to\infty}\int_0^b \frac{\sin(\lambda x)}{\sin(x)}F(x)\,dx = F(0)\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx
\end{aligned}$$

Par un choix astucieux de b et de λ déduire par ailleurs du dernier résultat la valeur de $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$.

1.8 (Noyau de Poisson) On pose, pour $0<r<1$:

$$P_r(t)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t)+r^2}$$

Faites une étude de fonction de $P_r(t)$ et expliquez comment son graphe se déforme avec r lorsque ce dernier tend vers 1 par valeurs inférieures. En utilisant au besoin les complexes donnez une série représentant $P_r(t)$ et en déduire la valeur de son intégrale sur $[-\pi\,,+\pi]$. Soit maintenant $f(t)$ une fonction R-intégrable sur (les intervalles bornés de) $\mathbb{R}$ et continue en zéro. Prouvez, pour tout $\delta\in\,]0\,,2\pi]$:

$$\lim_{r\to1^-}\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{+\delta}P_r(t)f(t)\,dt=f(0)\,.$$

Généralisez au cas où f admet une limite à gauche et une limite à droite en zéro. Que se passe-t-il si $\delta\geqslant 2\pi$?

1. les guillemets sont mis car les théorèmes démontrés par Dirichlet (avant la définition par Riemann de son intégrale) faisaient des hypothèses sur F un peu différentes.