Analyse 2 – Feuille 1

1 Intégrales de Riemann . . .

1.1 La définition et les propriétés fondamentales de l'intégrale au sens de Riemann ont été rappelées en cours,[1] pour les fonctions f à valeurs réelles. On considère maintenant une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ à valeurs complexes.

– Comment définissez-vous $\int_a^b f(t)\,dt$?
– Prouvez $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt$ (en ayant pris soin de justifier la R-intégrabilité de $|f|$. Bien sûr ici $a < b$).

1.2 Les intégrales de Riemann impropres (on dit aussi « généralisées ») suivantes sont-elles divergentes, semi-convergentes ou absolument convergentes : $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x^2}\,dx$, $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$, $\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{x}\,dx$, $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\,dx$, $\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\,dx$?

1.3 Que vaut, pour $x < y$, $\lim_{\lambda\to+\infty} \int_x^y |\sin(\lambda t)|\,dt$? Plus généralement, que vaut

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b \varphi(t)\big|\sin(\lambda t)\big|\,dt$$

lorsque $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction en escalier ? et lorsque $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue ou monotone ?

1.4 On considère une fonction continue T-périodique $g(t)$ à valeurs réelles ou complexes. Soit f une fonction R-intégrable sur $[a, b]$. En généralisant la méthode employée pour l'exercice précédent déterminer

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(t)g(\lambda t)\,dt\,.$$

On suppose seulement que f est R-intégrable sur les $[a + \varepsilon, b]$, $\varepsilon > 0$, et que l'intégrale impropre $\int_a^b |f(t)|\,dt$ converge. Montrer que le résultat obtenu reste valable.

1.5 (Dirichlet) Soit F une fonction intégrable au sens de Riemann sur $[0, b]$ $(b > 0)$. On examine l'intégrale

$$D(\lambda) = \int_0^b \frac{\sin(\lambda x)}{x} F(x)\,dx$$

1. voir aussi http://jf.burnol.free.fr/0506L312annexeRiemann.pdf

lorsque $\lambda \to +\infty$. On suppose que $L = \lim_{x\to 0} F(x)$ existe, et on redéfinit au besoin $F(0)$ via $F(0) = L$. En utilisant le Lemme de Riemann-Lebesgue avec par exemple $f(x) = \frac{F(x)-F(0)}{x}$, prouvez les « théorèmes de Dirichlet » [2] :

$$\textit{si } F'(0) \textit{ existe } \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^b \frac{\sin(\lambda x)}{x} F(x)\, dx = F(0) \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\, dx$$
$$\textit{et,si } b < \pi, \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^b \frac{\sin(\lambda x)}{\sin(x)} F(x)\, dx = F(0) \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\, dx$$

Par un choix astucieux de b et de λ déduire par ailleurs du dernier résultat la valeur de $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\, dx$.

1.6 Soit à nouveau $g(t)$ une fonction continue à valeurs réelles ou complexes et T-périodique. Donnez, si possible, et suivant les cas, un équivalent en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$ de

$$\int_1^A g(t)\, t^\alpha\, dt$$

lorsque $A \to +\infty$. Traitez en particulier le cas $g(t) = |\cos(t)|$.

1.7 (Noyau de Poisson) On pose, pour $0 < r < 1$:

$$P_r(t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(t) + r^2}$$

Faites une étude de fonction de $P_r(t)$ et expliquez comment son graphe se déforme avec r lorsque ce dernier tend vers 1 par valeurs inférieures. En utilisant au besoin les complexes donnez une série représentant $P_r(t)$ et en déduire la valeur de son intégrale sur $[-\pi, +\pi]$. Soit maintenant $f(t)$ une fonction R-intégrable sur (les intervalles bornés de) $\mathbb{R}$ et continue en zéro. Prouvez, pour tout $\delta \in]0, 2\pi[$:

$$\lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{+\delta} P_r(t) f(t)\, dt = f(0)\ .$$

Généralisez au cas où f admet une limite à gauche et une limite à droite en zéro. Que se passe-t-il si $\delta \geqslant 2\pi$?

2. les guillemets sont mis car les théorèmes démontrés par Dirichlet (avant la définition par Riemann de son intégrale) faisaient des hypothèses sur F un peu différentes.

Analyse 2 – Feuille 2

2 Exercices portant sur les matrices de Gram

2.1 Espaces euclidiens et préhilbertiens réels

On travaille dans un espace préhilbertien réel H, de dimension finie ou infinie, et dont le produit scalaire est noté $(\cdot\,,\cdot)$. La matrice de Gram de n vecteurs v_1, …, v_n est la matrice $G(\mathbf{v}) := ((v_i\,,v_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Le gramien est le déterminant de la matrice de Gram, il est noté $g(\mathbf{v})$.

2.1 Montrer pour $n = 1$ et pour $n = 2$ que le gramien de n vecteurs est positif ou nul, et qu'il est strictement positif si et seulement si les vecteurs sont linéairement indépendants.

2.2 Soit $X = (x_i)$ une colonne avec n entrées réelles : montrez la formule

$$^{t}X \cdot G(\mathbf{v}) \cdot X = \left\|x_1v_1 + \cdots + x_nv_n\right\|^2$$

2.3 On se donne n vecteurs $v_1, \ldots, v_n$. Montrez qu'il existe, si les v_j sont linéairement dépendants, une colonne X non nulle avec $G(\mathbf{v}) \cdot X = 0$. En déduire $g(\mathbf{v}) = 0$. Réciproquement montrer que $g(\mathbf{v}) = 0$ implique que les v_j sont linéairement dépendants.

2.4 On se donne $n+m$ vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ et $w_1, \ldots, w_m$ et on suppose que les w_j sont des combinaisons linéaires $w_j = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} p_{ij}v_i$. On note P la matrice rectangulaire avec n lignes et m colonnes dont les entrées sont les p_{ij}. Prouvez les formules $\boxed{G(\mathbf{w}) = {}^{t}P \cdot G(\mathbf{v}) \cdot P}$ et (**si $n = m$**) $\boxed{g(\mathbf{w}) = |\det P|^2 g(\mathbf{v})}$.

2.5 Soit $v_1, \ldots, v_n$ des vecteurs linéairement indépendants. Notons $K(\mathbf{v}) = G(\mathbf{v})^{-1}$. On se donne un vecteur x quelconque et on note $X = (x_i)$ la colonne des produits scalaires $x_i = (x\,,v_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, puis $Y = (y_i) = K(\mathbf{v})\cdot X$ et finalement $y = y_1v_1 + \cdots + y_nv_n$. Montrer $(y\,,v_i) = (x\,,v_i)$ pour tout i. En déduire que y est la projection orthogonale $\pi(x)$ de x sur le sous espace vectoriel $V \subset H$ engendré par v_1, …, v_n. Comment peut-on en particulier calculer les coordonnées dans la base $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ d'un vecteur donné v de V ?

2.6 (suite) Montrez que le gramien des $n+1$ vecteurs $v_1, \ldots v_n$, et $x-\pi(x)$ vaut $g(\mathbf{v})\|x - \pi(x)\|^2$ et qu'il est aussi égal au gramien $g(v_1, \ldots, v_n, x)$. En déduire par récurrence sur le nombre de vecteurs que les gramiens sont toujours positifs ou nuls (et on sait déjà qu'ils sont non nuls en cas d'indépendance linéaire). Retrouvez ce résultat en utilisant l'existence de bases orthogonales.

2.7 Soit $H = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $(P, Q) = \int_0^\infty P(x)Q(x)e^{-x}\,dx$. Que valent les (X^n, X^m) ? Calculez la matrice de Gram de 1, X, X^2 et son inverse. Déterminez la projection orthogonale $a+bX+cX^2$ de X^3 sur $\mathbb{R}\cdot 1+\mathbb{R}\cdot X+\mathbb{R}\cdot X^2$ et aussi la valeur de $\left\|X^3 - a - bX - cX^2\right\|^2$.

2.8 Soit $H = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $(P, Q) = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 P(x)Q(x)\,dx$. Que valent les (X^n, X^m) ? Calculez la matrice de Gram de X, X^2, X^3, X^4 et son inverse. Déterminez la valeur des coefficients qui minimisent

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1 - \alpha t - \beta t^2 - \gamma t^3 - \delta t^4)^2\,dt$$

ainsi que la valeur de ce minimum. Donner un argument a priori qui implique $\alpha = \gamma = 0$.

2.9 On reprend l'exercice 2.5. Notons ξ_1, …, ξ_n les vecteurs qui s'expriment dans la base $\mathscr{B} = (v_1, \dots, v_n)$ de $V \subset H$ par les colonnes de la matrice $K(\mathbf{v})$, inverse de la matrice de Gram $G(\mathbf{v})$. Montrez que la matrice des produits scalaires (ξ_i, v_j) est la matrice identité. On dit que $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ est le système dual (ou « biorthogonal ») de $(v_1, \dots, v_n)$. Prouvez l'identité $G(\boldsymbol{\xi}) = G(\mathbf{v})^{-1}$. Montrez que tout vecteur v de V vérifie l'identité $v = \sum_j (v, \xi_j)v_j = \sum_j (v, v_j)\xi_j$. Quel est le système dual d'un système orthogonal ? d'une base orthonormée ?

2.2 Espaces hermitiens et préhilbertiens complexes

Nos produits scalaires complexes $(\cdot, \cdot)$ seront linéaires en leur première entrée et conjugués-linéaires en leur seconde entrée. On définit $G(v_1, \dots, v_n)$ par $((v_j, v_i))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et non par $((v_i, v_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ (dans le cas réel ce sont les mêmes matrices, ici l'une est conjuguée complexe de l'autre).

2.10 Montrez que les formules des exercices 2.2 et 2.4 deviennent

$$X^* \cdot G(\mathbf{v}) \cdot X = \Big\|\sum_j x_j v_j\Big\|^2 \qquad G(\mathbf{w}) = P^* \cdot G(\mathbf{v}) \cdot P$$

On rappelle la notation $M^* := {}^t\overline{M}$ pour le conjugué hermitien d'une matrice M. Vérifiez la validité des autres exercices (positivité, projections orthogonales, systèmes duaux…) On notera au passage que $G(\mathbf{v}) = G(\mathbf{v})^*$.

Analyse 2 – Feuille 3

3 Séries de Fourier

La notation suivante pour le « noyau de Dirichlet » est systématiquement employée dans le contexte des séries de Fourier pour les fonctions 2π-périodiques :

$$D_N(t) = 1 + 2\sum_{n=1}^{N} \cos(nt)$$

On note $S_N(f)$ la N^e somme partielle de la série de Fourier de f, qui est sa projection orthogonale (pour le produit scalaire $(f, g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt$) sur les polynômes trigonométriques de degrés au plus N. Pour le moment nous travaillons avec des fonctions à valeurs réelles.

3.1 Rappeler les formules pour les coefficients de Fourier $a_n(f)$ $(n \geqslant 0)$ et $b_n(f)$ $(n \geqslant 1)$. Simplifier ces formules lorsque f est paire, ou impaire.

3.2 Montrer l'identité fondamentale $D_N(t) = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{1}{2}t)}$. Que valent $D_N(0)$, $\int_0^{2\pi} D_N(t)\,dt$ et $\int_0^{2\pi} D_N(t)^2\,dt$?

3.3 Montrer, pour toute fonction f Riemann-intégrable 2π-périodique :

$$S_N(f)(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_N(x_0 - t)f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} D_N(t)(f(x_0 + t) + f(x_0 - t))\,dt$$

3.4 (Théorème de convergence ponctuelle « de Dirichlet ») Déduire du résultat précédent et de l'exercice 1.5 que l'on a

$$\lim_{N\to\infty} S_N(f)(x_0) = \frac{1}{2}\left(f(x_0^+) + f(x_0^-)\right)$$

dès que f admet des limites à droite et à gauche en x_0 et aussi (en un sens que l'on précisera) des dérivées à droite et à gauche en ce même point.

3.5 Soit f une fonction 2π-périodique, continue, affine par morceaux : sur $[x_{j-1}, x_j]$, $1 \leqslant j \leqslant M$, $x_0 = 0$, $x_M = 2\pi$, on a $f' = \lambda_j$ constant. On pose $\lambda_{M+1} = \lambda_1$. Prouver pour $n \geqslant 1$:

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi n^2}\sum_{1\leqslant j\leqslant M} (\lambda_j - \lambda_{j+1})\cos(nx_j) \qquad b_n(f) = \frac{1}{\pi n^2}\sum_{1\leqslant j\leqslant M} (\lambda_j - \lambda_{j+1})\sin(nx_j)$$

En utilisant le Théorème de convergence de Dirichlet, montrer qu'il existe une certaine constante K dépendant des λ_i et telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall N \geqslant 1 \quad |f(x) - S_N(f)(x)| \leqslant \frac{K}{N} .$$

3.6 (Approximation en norme L^2 et Identité de Parseval) Déduire de l'exercice précédent que l'identité de Parseval est valable pour les fonctions continues affines par morceaux ; puis pour la fonction « créneau » (2π pér. bien sûr) valant 0 sur $]0, a[$, C sur $]a, b[$, et 0 sur $]b, 2\pi[$, pour certains $0 \leqslant a < b \leqslant 2\pi$ et $C \in \mathbb{R}$; puis pour toutes les fonctions en escaliers, puis pour toutes les fonctions Riemann-intégrables (2π-périodiques). Autrement dit rédiger les détails des arguments donnés par le Professeur lors de son cours.

3.7 (Fonctions T-périodiques) Soit $T > 0$. On pose $\omega = \frac{2\pi}{T}$, puis $u_n(t) = \cos(n\omega t)$, $v_n(t) = \sin(n\omega t)$, montrer qu'elles sont T-périodiques. Comment définissez-vous le produit scalaire pour que les u_n ($n \geqslant 0$) et les v_n ($n \geqslant 1$) vérifient les mêmes relations d'orthogonalité que pour $T = 2\pi$, $\omega = 1$? Comment s'écrivent les formules de Fourier et l'identité de Bessel-Parseval ?

3.8 Justifier de deux manières l'identité suivante, en vérifiant au passage le célèbre résultat dû à Euler $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \frac{1}{6}\pi^2$: d'une part par le Théorème de Dirichlet de convergence ponctuelle, d'autre part par l'identité de Parseval pour des fonctions bien choisies.

$$0 \leqslant x \leqslant \pi \implies \sum_{n=1} \frac{\sin^2(nx)}{n^2} = \frac{x(\pi - x)}{2}$$

3.9 Soit $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$. Déterminer (en distinguant soigneusement $|r| < 1$ de $|r| > 1$) les séries de Fourier des fonctions 2π-périodiques :

$$P_r(t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(t) + r^2}$$

On pensera (si $r \neq 0$) à utiliser $1 - 2r\cos(t) + r^2 = (1 - z)(1 - r^2 z^{-1})$ avec $z = re^{it}$. Que valent, comme fonctions de $A, B > 1$ (ou de $r = e^{-u}, s = e^{-v}$ avec $u, v > 0$ choisis tels que $\mathrm{ch}(u) = A$ et $\mathrm{ch}(v) = B$) les intégrales :

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(A - \cos(t))^2}\ , \qquad \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(B - \sin(t))^2}\ , \qquad \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(A - \cos(t))(B - \sin(t))}\ ?$$

3.10 Soit $r \in]-1,+1[$ et $t \in \mathbb{R}$. Montrer (par le calcul des dérivées par rapport à t ou via un logarithme complexe) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n \sin(nt)}{n} = \mathrm{Arctg}\left(\frac{r\sin(t)}{1 - r\cos(t)}\right)$$

En déduire (en invoquant le Théorème d'Abel pour le passage à la limite) la somme de la série lorsque $r = \pm 1$. Et que vaut $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n \cos(nt)}{n}$? Et pour $r = \pm 1$? Et est-ce alors la série de Fourier d'une fonction Riemann-intégrable ?

4 Produits scalaires et séries de Fourier complexes

4.1 Rappeler les formules pour les coefficients de Fourier $c_n(f)$, $n \in \mathbb{Z}$. Exprimer les c_n en fonction des a_n, b_n, et réciproquement. Rappeler comment s'exprime l'identité de Parseval avec les $c_n(f)$. Que vaut (f, g) en fonction des $c_n(f)$ et des $c_n(g)$? Que vaut, en fonction de ces mêmes coefficients

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt \,?$$

Et en fonction des a_n et b_n ?

4.2 Soit f la fonction 2π-périodique définie par $f(t) = i(\pi - t)$ sur $[0, 2\pi[$.

(a) Montrer $c_n(f) = \frac{1}{n}$ pour $n \geqslant 1$. Déterminer aussi $c_n(f)$ pour $n \leqslant 0$.

(b) Soit $a_1, \ldots, a_n$ des nombres complexes ; montrer :

$$\sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} \frac{a_j a_k}{j + k - 1} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j e^{-ijt}\right)^2 e^{it} f(t)\,dt\,.$$

(c) En déduire l'inégalité de Hilbert :

$$\left|\sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} \frac{a_j a_k}{j + k - 1}\right| \leqslant \pi \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2\,.$$

4.3 Soit f une fonction 2π-périodique, de classe C^1 par morceaux, et soit g la fonction définie par $g(x) = f'(x)$ aux points de dérivabilité de f et par

$g(x) = 0$ ailleurs. Comment reliez-vous les coefficients de Fourier de f et ceux de g ? et si f est supposée, de plus, continue ?

4.4 Soit f continue, telle que $\forall K \geqslant 1\ a_n(f), b_n(f) = \mathcal{O}(n^{-K})$. Montrer que f est infiniment dérivable. Et si f est supposée continue par morceaux ?

4.5 On admettra $|\sqrt{2} - \frac{p}{q}| > \frac{1}{3q^2}$ pour $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

(i) Établir : $\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad \left|e^{2\pi i n \sqrt{2}} - 1\right| > \dfrac{4}{3|n|}$.

(ii) Soit g une fonction continue 1-périodique. Soit f une fonction Riemann intégrable sur [0, 1], 1-périodique, et vérifiant

$$(*) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x + \sqrt{2}) - f(x) = g(x)$$

Que peut-on dire des coefficients de Fourier de f ?

(iii) Soit g une fonction 1-périodique de classe C^∞. Déterminer sous quelle condition sur g il existe une fonction 1-périodique R-intégrable sur [0, 1] et vérifiant (*). Montrer que toutes les solutions continues par morceaux sont de classe C^∞.

4.6 Soit H un espace préhilbertien complexe de dimension infinie, et soit $(x_i)_{i \geqslant 1}$ une suite dans H avec $\|x_i\| = 1$ pour tout i, et vérifiant

$$\exists C \geqslant 0 \qquad i \neq j \implies \|x_i - x_j\| \geqslant C .$$

Montrer

$$N(N-1)C^2 \leq \sum_{1 \leq i,j \leq N} \|x_i - x_j\|^2 \leq \sum_{1 \leq i,j \leq N} (\|x_i\|^2 + \|x_j\|^2) = 2N^2 ,$$

et en déduire $C \leqslant \sqrt{2}$. Peut-on avoir $C = \sqrt{2}$?

4.7 Soit F un espace vectoriel de fonctions continues sur [0, 1], sur lequel les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes : il existe $K < \infty$ tel que $\|f\|_\infty \leqslant K\|f\|_2$ pour toute $f \in F$ (dans l'autre sens, on a de manière évidente $\|f\|_2 \leqslant \|f\|_\infty$).

(A) Soit $f_1, f_2, \ldots, f_n$ un système orthonormé fini de F. Montrer pour tous $t \in [0, 1]$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{C}$:

$$\left|\lambda_1 f_1(t) + \cdots + \lambda_n f_n(t)\right| \leqslant K \cdot (|\lambda_1|^2 + \cdots + |\lambda_n|^2)^{1/2}$$

(B) Montrer par un bon choix des λ_i :

$$\forall t \in [0, 1], \ |f_1(t)|^2 + \cdots + |f_n(t)|^2 \leqslant K \cdot (|f_1(t)|^2 + \cdots + |f_n(t)|^2)^{1/2}$$

(C) En déduire finalement $n \leqslant K^2$. Conclusion ?

Analyse 2 – Feuille 4

5 Transformées de Fourier

5.1 Cet exercice consiste simplement à refaire la démonstration que la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ est la fonction $u \mapsto \sqrt{2\pi}e^{-\frac{u^2}{2}}$. On en déduira aussi la valeur de $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\,dx$.

5.2 Déduire de l'exercice précédent que la fonction positive

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

est une densité de probabilité. Quelle est la fonction caractéristique $\mathbb{E}(e^{i\xi X})$ d'une variable aléatoire vérifiant la loi $P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b g(x)\,dx$?

5.3 Soit $a > 0$. Quelle est la transformée de Fourier de la fonction qui vaut 1 pour $-a < t < a$ et zéro ailleurs ?

5.4 (suite) Déduire de l'exercice précédent et de la formule de Plancherel (sesquilinéaire) la valeur des intégrales, pour a et b réels :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(au)\sin(bu)}{u^2}\,du$$

5.5 (suite) Quelle est la transformée de Fourier de la fonction qui vaut 1 pour $-b + c < t < b + c$ et zéro ailleurs, pour $b > 0$, et $c \in \mathbb{R}$? Que valent, suivant les valeurs de $a > 0$, $b > 0$ et $c \in \mathbb{R}$ les intégrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(au)\sin(bu)e^{icu}}{u^2}\,du \quad ?$$

Que valent

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(au)\sin(bu)\cos(cu)}{u^2}\,du \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(au)\sin(bu)\sin(cu)}{u^2}\,du \quad ?$$

5.6 (suite) Quelle est la valeur de

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(au)\sin^2(bu)}{u^4}\,du \quad ?$$

5.7 (suite) Quelle est la transformée de Fourier de la fonction triangle

$$f(t) = \max(1 - |t|, 0) \qquad ?$$

5.8 (suite) Quelle est, pour $0 < a < b$, la tranformée de Fourier de la fonction continue qui vaut 1 pour $-a < t < a$, 0 pour $|t| > b$ et qui est affine sur $[-b, -a]$ et $[a, b]$. Donnez quelques valeurs d'intégrales en utilisant cette information.

5.9 Quelle est la transformée de Fourier de la fonction $e^{-|t|}$? Quelles intégrales en déduisez-vous ? Par exemple, que valent

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(xy)}{1+x^2}\,dx\,, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{(1+x^2)^2}\,dx \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx \quad (n = 2, 4) \quad ?$$

Problème, partie I

Soit $a \in \mathbb{R}$ quelconque. La fonction 2π-périodique f est définie par :

$$-\pi \leqslant x < \pi \implies f(x) = e^{\frac{1}{2}ax} e^{-i\frac{1}{2}x}$$

5.10 Prouver que les coefficients de Fourier sont donnés par

$$c_k(f) = \frac{2\,\mathrm{ch}(\frac{\pi a}{2})}{\pi} \frac{(-1)^k}{2k+1+ia}$$

5.11 En déduire que l'on a :

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N-1}^{k=N} \frac{(-1)^k}{2k+1+ia} = \frac{\pi}{2\,\mathrm{ch}(\frac{\pi a}{2})}$$

Il y a une justification additionnelle à donner à l'emploi du Théorème de Dirichlet en ce qui concerne les valeurs de k que l'on met dans la somme.

5.12 Déduire de l'exercice précédent le théorème suivant :

$$\forall a \in \mathbb{R} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(-1)^k(2k+1)}{(2k+1)^2 + a^2} = \frac{\pi}{2\,\mathrm{ch}(\frac{\pi a}{2})}$$

5.13 En considérant la série de Fourier de f au point $x = \pi$, montrer :

$$\forall a \in \mathbb{R} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2 + a^2} = \frac{\pi}{4a}\,\mathrm{th}(\frac{\pi a}{2})$$

Confirmer ce résultat via Bessel-Parseval.

Problème, partie II

Le but de cette deuxième partie est de calculer la transformée de Fourier de la fonction

$$f(t) = \frac{2}{e^{t} + e^{-t}} = \frac{1}{\operatorname{ch} t}$$

5.14 Montrer que pour tout $t \geqslant 0$ et tout $N \in \mathbb{N}$ on a :

$$\left| \frac{1}{\operatorname{ch} t} - 2e^{-t} \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^{j} e^{-2jt} \right| \leqslant e^{-2Nt}$$

5.15 Montrer

$$\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-itu}}{\operatorname{ch} t} dt = \lim_{N \to +\infty} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{2(-1)^{j}}{2j + 1 + iu}$$

La somme est-elle absolument convergente ?

5.16 Déduire de l'exercice précédent :

$$\widehat{f}(u) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j} \frac{4(2j + 1)}{(2j + 1)^{2} + u^{2}}$$

5.17 En combinant les deux parties du Problème montrer finalement :

$$\widehat{\frac{1}{\operatorname{ch} t}}(u) = \frac{\pi}{\operatorname{ch}(\frac{\pi u}{2})}$$

(fin du Problème)

5.18 (Polynômes de Hermite et fonctions propres de l'oscillateur harmonique quantique) On note D_x l'opération de dériver $\frac{d}{dx}$ et M_x l'opération de multiplier par x. On note simplement 1 pour l'opération qui ne fait rien (ce qui n'est pas rien !). Montrer que lorsqu'on les fait agir sur des fonctions ayant le nombre suffisant de dérivées, on a les relations symboliques :

$$D_x M_x = M_x D_x + 1$$

$$(M_x + D_x)(M_x - D_x) = -D_x^{2} + M_x^{2} + 1$$

$$(M_x - D_x)(M_x + D_x) = -D_x^2 + M_x^2 - 1$$
$$(M_x + D_x)(M_x - D_x) = (M_x - D_x)(M_x + D_x) + 2$$
$$(M_x + D_x)(M_x - D_x)^n = (M_x - D_x)^n(M_x + D_x) + 2n(M_x - D_x)^{n-1}$$

On rappelle que si $x \mapsto f(x)$, $f'(x)$, et $xf(x)$ sont toutes les trois dans $\mathcal{R}^1(\mathbb{R})$, alors, en notant ξ la variable pour la transformée de Fourier $\widehat{f}$, on a les relations symboliques $D_\xi = -iM_x$, $M_\xi = -iD_x$. Montrer $M_\xi D_\xi = -D_x M_x$ et :

$$M_\xi + D_\xi = -i(M_x + D_x) \quad \text{ou plus précisément } (M_\xi + D_\xi) \circ \mathcal{F} = -i\mathcal{F} \circ (M_x + D_x)$$
$$M_\xi - D_\xi = +i(M_x - D_x)$$

On considère la fonction $f_0(x) = \exp(-x^2/2)$. Montrer qu'il existe pour chaque n un polynôme H_n (de degré n) tel que :

$$f_n(x) := (M_x - D_x)^n \exp(-x^2/2) = H_n(x) \exp(-x^2/2)$$

Montrer que H_n est pair pour n pair et impair pour n impair et vérifier les premières valeurs :

$$H_0(x) = 1$$
$$H_1(x) = 2x$$
$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$
$$H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

Trouver des choses intéressantes à dire sur les H_n et les f_n :

(i) La transformée de Fourier de $f_n(x)$ est $\widehat{f_n}(\xi) = \sqrt{2\pi}\,(-i)^n f_n(\xi)$.

(ii) On a la récurrence, pour $n \geqslant 2$:

$$H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - 2(n-1)H_{n-2}(x)$$

Ind. : $2M_x = (M_x + D_x) + (M_x - D_x)$.

(iii) Que vaut $H_n(0)$? quel est le coefficient dominant de H_n ?

(iv) Que vaut $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)^2\,dx$? humm… lemmes : $(M_x+D_x)\big(k(x)e^{-x^2/2}\big) = k'(x)e^{-x^2/2}$ et (sous certaines conditions) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(xg(x)-g'(x))\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}(xf(x)+f'(x))g(x)\,dx$.

(v) Plus généralement que valent les produits scalaires :

$$(H_n, H_m) = \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)H_m(x)\,e^{-x^2}\,dx \quad ?$$

(vi) Et que vaut $-f_n''(x) + x^2 f_n(x)$?

Analyse 2 – Feuille 5

6 Équations différentielles linéaires

6.1 Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n}$ une matrice rectangulaire à coefficients réels ou complexes et $\|A\| = (\sum|a_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}}$ sa norme de Frobenius. Montrer

$$\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$$

lorsque le produit matriciel AB existe.

6.2 On suppose que $A(t) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{C})$ dépend continûment de $t \in I$, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Montrer $\left\|\int_{t_0}^{t} A(u)\,du\right\| \leqslant \left|\int_{t_0}^{t}\|A(u)\|\,du\right|$ pour $t_0, t \in I$.

6.3 Montrer $e^{A+B} = e^A e^B$ lorsque les matrices carrées A et B à coefficients réels ou complexes vérifient $AB = BA$. Indication : calculer la dérivée par rapport à t de $e^{tA}e^{tB}$, puis utiliser le résultat du cours sur la résolvante d'un système linéaire à coefficients constants.

6.4 Soit $A = \begin{bmatrix} \lambda & -\theta \\ \theta & \lambda \end{bmatrix}$. Que vaut e^A ? On calculera d'abord $e^{\begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix}}$.

6.5 Montrer $Se^AS^{-1} = e^{SAS^{-1}}$. En déduire (trigonaliser) le polynôme caractéristique de e^A en fonction de celui de A et prouver $\det e^A = e^{\operatorname{Tr} A}$.

6.6 On rappelle la notation pour le commutateur de deux matrices carrées $[A, B] = AB - BA$. *On suppose que* $[A, B]$ *commute avec* A *et avec* B. Montrer par récurrence $[B, (A + B)^n] = n[B, A](A + B)^{n-1}$ puis $[B, e^{t(A+B)}] = t\,[B, A]e^{t(A+B)}$. On pose $\varphi(t) = e^{-tA}e^{t(A+B)}e^{-tB}$. Montrer

$$\varphi(t + h) = \varphi(t) + h\Big(e^{-tA}Be^{t(A+B)}e^{-tB} - e^{-tA}e^{t(A+B)}Be^{-tB}\Big) + \mathcal{O}(h^2)$$

En déduire l'équation différentielle $\varphi'(t) = t\,[B, A]\varphi(t)$ puis la valeur de $\varphi(t)$. Conclure en établissant l'identité de Glauber :

$$e^Ae^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}$$

6.7 On considère sur un intervalle I une fonction A continue à valeurs matricielles et le système différentiel linéaire homogène $Y' = AY$ associé. On prend $(Y_1, \ldots, Y_n)$ une base de l'espace vectoriel des solutions et on note

$U = (Y_1 | \cdots | Y_n)$ la matrice fondamentale associée, qui est une fonction de $t \in I$. Prouver :

$$\det U(t) = e^{\int_{t_0}^t \operatorname{Tr} A(u)\, du} \det U(t_0)$$

Ind. : un développement limité au premier ordre en h de $\det U(t+h)$ s'obtient en utilisant (sans l'expliciter plus) la matrice de l'endomorphisme de multiplication par $A(t)$ dans la base $(Y_1(t), \ldots, Y_n(t))$ de $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$).

6.8 Montrer que la résolvante $T(t, t_0)$ est donnée par la formule $I_n + \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t, t_0)$ avec $T_{k+1}(t, t_0) = \int_{t_0}^t A(u) T(u, t_0)\, du$, $T_0(t, t_0) = I_n$.

6.9 On a indiqué en cours que la résolvante $T(t, t_0)$ vérifiait la relation $\frac{\partial}{\partial t} T(t, t_0) = A(t) T(t, t_0)$. Que vaut $\frac{\partial}{\partial u} T(t, u)$? Ind. : utiliser $T(t, u) T(u, t) = I_n$.

6.10 Si $T(t, u)$ est la résolvante du système $Y' = AY$, de quel système $R(t, u) = {}^tT(u, t)$ est-elle la résolvante ?

6.11 On suppose que les matrices $A(t)$ commutent deux-à-deux. Avec $V_k(t) = \frac{1}{k!} \left(\int_{t_0}^t A(u)\, du \right)^k$, montrer $V_k'(t) = A(t) V_{k-1}(t)$ pour $k \geqslant 1$ (attention, la commutativité est essentielle). En déduire que la résolvante du système différentiel homogène associé est dans ce cas $T(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^t A(u)\, du}$.

6.12 (suite) On considère un système différentiel :

$$(S) \begin{cases} f'(t) = a(t) f(t) - b(t) g(t) \\ g'(t) = b(t) f(t) + a(t) g(t) \end{cases}$$

Déterminer la résolvante du système (S). Montrer que les fonctions $f(t) = \int_0^{\infty} u^{-\frac{1}{2}} e^{-u} \sin(ut)\, du$, $g(t) = \int_0^{\infty} u^{-\frac{1}{2}} e^{-u} \cos(ut)\, du$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et solutions d'un système du type (S). En déduire leurs expressions.

6.13 On considère sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ d'intérieur non vide une équation différentielle homogène ($q : I \to \mathbb{C}$ continue) :

$$y'' + q\, y = 0 \qquad \textbf{[E]}$$

1. Que peut-on dire du Wronskien $w(y_1, y_2)$ de deux solutions ?
2. Soit y_1 une solution non identiquement nulle. Soit $J \subset I$ un intervalle sur lequel y_1 ne s'annule pas. Soit y_2 une fonction sur J telle que $w(y_1, y_2) = 1$. Montrer que y_2 est une solution de **[E]**, linéairement indépendante de y_1.

3. Soit $t_0 \in I$ et y_1 la solution avec $y_1(t_0) = 1$, $y_1'(t_0) = 0$. Exprimer en fonction de y_1 la solution y_2 telle que $y_2(t_0) = 0$, $y_2'(t_0) = 1$.
4. Soit à nouveau y_1 et y_2 deux solutions de **[E]** linéairement indépendantes. On pose $f = \frac{y_2}{y_1}$ sur l'ouvert $J = I \setminus \{y_1(t) = 0\}$. Calculer f', f'' et f''' et prouver la formule : $\frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 = 2q$.

6.14 Déterminer la résolvante du système associé à l'équation différentielle $y'' + y = 0$ (on pourra par exemple donner une matrice fondamentale de solutions évidentes). Quelle est la solution de l'équation $f'' + f = g$ vérifiant $f(t_0) = f'(t_0) = 0$, pour $t_0 \in \mathbb{R}$ et g donnés, g continue sur $\mathbb{R}$? On suppose $\int_0^\infty |g(u)|\,du < \infty$. Montrer que f est bornée sur $[0, +\infty[$.

6.15 Trouver la solution générale de l'équation $y'' + y' + y = 0$, et la valeur de $e^{t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}$. On suppose $f''(t) + f'(t) + f(t) = g(t)$, avec g une fonction T-périodique. En considérant la fonction $f(t + T) - f(t)$, montrer que si f est bornée alors elle aussi est T-périodique.

6.16 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Résoudre directement le système différentiel associé. En déduire e^{tA} puis finalement les A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6.17

1. Soit f une fonction sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes, de classe C^1 et vérifiant $\lim_{t\to+\infty} f'(t) + \alpha f(t) = 0$ avec $\Re(\alpha) > 0$. Prouver $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$. Indication : poser $z(t) = f'(t) + \alpha f(t)$ et considérer z comme le terme inhomogène d'une équation différentielle.
2. Soit f une fonction de classe C^n et c_k, $0 \leqslant k \leqslant n$ des nombres complexes, $c_n \neq 0$. On suppose $\lim_{t\to+\infty} \sum_{k=0}^n c_k f^{(k)}(t) = 0$, et que les racines de $P(r) = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} c_k r^k$ vérifient $\Re(r) < 0$. Montrer $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

6.18 (Bessel d'ordre zéro) Étudier l'équation de Bessel :

$$t\,y'' + y' + t\,y = 0 \qquad \textbf{[J}_0\textbf{]}$$

1. Montrer qu'il existe une unique solution f (à un multiple près) sur $]0, +\infty[$ qui dans un voisinage de 0 est de la forme $S(t) = \sum_{n=0}^\infty a_n t^n$.
2. Montrer que S a rayon de convergence infini et que sa somme f est l'unique solution de **[J_0]** sur $\mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On s'intéressera au Wronskien $w(f, g)$ de f et d'une autre solution éventuelle g.

3. Par une étude plus précise, donner le comportement asymptotique pour $x \to 0^+$ des autres solutions que f et ses multiples.
4. On pose $z = \sqrt{t}\,y$, sur $]0, +\infty[$. Quelle est l'équation vérifiée par z ?
5. Montrer en considérant une équation inhomogène bien choisie :

$$z(t) = A\cos t + B\sin t - \int_1^t \frac{z(u)}{4u^2}\sin(t-u)\,du,$$

où A et B sont des constantes.
6. Montrer que z est bornée pour $t \geqslant 1$.
7. En déduire que toute solution de l'équation de Bessel vérifie :

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{C} \qquad y(t) = \frac{\alpha\cos t + \beta\sin t}{\sqrt{t}} + O_{t\to+\infty}(t^{-3/2})\ .$$

6.19 (Lax) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ de classe C^1. On suppose qu'il existe pour chaque $t \in \mathbb{R}$ une matrice N(t) telle que

$$f'(t) = [f(t), N(t)]$$

Montrer $\frac{d}{dt}f(t)^k = [f(t)^k, N(t)]$, et en déduire que $\mathrm{Tr}\, f(t)^k$ ne dépend pas de t. Prouver que le polynôme caractéristique de f ne dépend pas du temps t.

6.20 Soit q une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0, \infty[$. Montrer que l'équation $-y'' + qy = 0$ possède une solution non bornée sur $[0, +\infty[$.

7 Équations non-linéaires

7.1 Déterminer la solution maximale de l'équation : $y' = y^4$, vérifiant la condition initiale $y(0) = y_0$.

7.2 Déterminer les solutions maximales de l'équation $y' = \sin(y)$ en discutant suivant la valeur de $y(0) = y_0$.

7.3 (Riccati) On considère l'équation non-linéaire $y' = ay^2 + by + c$ avec a, b, c continues sur $\mathbb{R}$. Que peut-on dire du birapport $[y_1 : y_2 : y_3 : y_4]$ de quatre solutions distinctes ? Ind. : montrer que $(y_1-y_2)(y_3-y_4)$ et $(y_1-y_3)(y_2-y_4)$ sont solutions de la même équation différentielle linéaire.

7.4 Ouvrir un livre et résoudre quelques centaines d'équations différentielles. Dites merci à Newton et Leibnitz, sans lesquels vous en seriez encore à vivre tout nus (et pleins de poux) dans des cavernes.