Analyse 2 – Feuille 4

5 Transformées de Fourier

5.1 Cet exercice consiste simplement à refaire la démonstration que la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ est la fonction $u \mapsto \sqrt{2\pi}e^{-\frac{u^2}{2}}$. On en déduira aussi la valeur de $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\,dx$.

5.2 Déduire de l'exercice précédent que la fonction positive

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

est une densité de probabilité. Quelle est la fonction caractéristique $\mathbb{E}(e^{i\xi X})$ d'une variable aléatoire vérifiant la loi $P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b g(x)\,dx$?

5.3 Soit $a > 0$. Quelle est la transformée de Fourier de la fonction qui vaut 1 pour $-a < t < a$ et zéro ailleurs ?

5.4 (suite) Déduire de l'exercice précédent et de la formule de Plancherel (sesquilinéaire) la valeur des intégrales, pour a et b réels :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(au)\sin(bu)}{u^2}\,du$$

5.5 (suite) Quelle est la transformée de Fourier de la fonction qui vaut 1 pour $-b + c < t < b + c$ et zéro ailleurs, pour $b > 0$, et $c \in \mathbb{R}$? Que valent, suivant les valeurs de $a > 0$, $b > 0$ et $c \in \mathbb{R}$ les intégrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(au)\sin(bu)e^{icu}}{u^2}\,du \quad ?$$

Que valent

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(au)\sin(bu)\cos(cu)}{u^2}\,du \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(au)\sin(bu)\sin(cu)}{u^2}\,du \quad ?$$

5.6 (suite) Quelle est la valeur de

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(au)\sin^2(bu)}{u^4}\,du \quad ?$$

5.7 (suite) Quelle est la transformée de Fourier de la fonction triangle

$$f(t) = \max(1 - |t|, 0) \qquad ?$$

5.8 (suite) Quelle est, pour $0 < a < b$, la tranformée de Fourier de la fonction continue qui vaut 1 pour $-a < t < a$, 0 pour $|t| > b$ et qui est affine sur $[-b, -a]$ et $[a, b]$. Donnez quelques valeurs d'intégrales en utilisant cette information.

5.9 Quelle est la transformée de Fourier de la fonction $e^{-|t|}$? Quelles intégrales en déduisez-vous ? Par exemple, que valent

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(xy)}{1 + x^2}\,dx\,, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{(1 + x^2)^2}\,dx \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1 + x^2)^n}\,dx \quad (n = 2, 4) \quad ?$$

Problème, partie I

Soit $a \in \mathbb{R}$ quelconque. La fonction 2π-périodique f est définie par :

$$-\pi \leqslant x < \pi \implies f(x) = e^{\frac{1}{2}ax} e^{-i\frac{1}{2}x}$$

5.10 Prouver que les coefficients de Fourier sont donnés par

$$c_k(f) = \frac{2\,\mathrm{ch}(\frac{\pi a}{2})}{\pi} \frac{(-1)^k}{2k + 1 + ia}$$

5.11 En déduire que l'on a :

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N-1}^{k=N} \frac{(-1)^k}{2k + 1 + ia} = \frac{\pi}{2\,\mathrm{ch}(\frac{\pi a}{2})}$$

Il y a une justification additionnelle à donner à l'emploi du Théorème de Dirichlet en ce qui concerne les valeurs de k que l'on met dans la somme.

5.12 Déduire de l'exercice précédent le théorème suivant :

$$\forall a \in \mathbb{R} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(-1)^k(2k + 1)}{(2k + 1)^2 + a^2} = \frac{\pi}{2\,\mathrm{ch}(\frac{\pi a}{2})}$$

5.13 En considérant la série de Fourier de f au point $x = \pi$, montrer :

$$\forall a \in \mathbb{R} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k + 1)^2 + a^2} = \frac{\pi}{4a}\,\mathrm{th}(\frac{\pi a}{2})$$

Confirmer ce résultat via Bessel-Parseval.

Problème, partie II

Le but de cette deuxième partie est de calculer la transformée de Fourier de la fonction

$$f(t) = \frac{2}{e^t + e^{-t}} = \frac{1}{\operatorname{ch} t}$$

5.14 Montrer que pour tout $t \geqslant 0$ et tout $N \in \mathbb{N}$ on a :

$$\left| \frac{1}{\operatorname{ch} t} - 2e^{-t} \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^j e^{-2jt} \right| \leqslant e^{-2Nt}$$

5.15 Montrer

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-i\,tu}}{\operatorname{ch} t} dt = \lim_{N \to +\infty} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{2(-1)^j}{2j + 1 + iu}$$

La somme est-elle absolument convergente ?

5.16 Déduire de l'exercice précédent :

$$\widehat{f}(u) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{4(2j + 1)}{(2j + 1)^2 + u^2}$$

5.17 En combinant les deux parties du Problème montrer finalement :

$$\widehat{\frac{1}{\operatorname{ch} t}}(u) = \frac{\pi}{\operatorname{ch}(\frac{\pi u}{2})}$$

(fin du Problème)

5.18 (Polynômes de Hermite et fonctions propres de l'oscillateur harmonique quantique) On note D_x l'opération de dériver $\frac{d}{dx}$ et M_x l'opération de multiplier par x. On note simplement 1 pour l'opération qui ne fait rien (ce qui n'est pas rien !). Montrer que lorsqu'on les fait agir sur des fonctions ayant le nombre suffisant de dérivées, on a les relations symboliques :

$$D_x M_x = M_x D_x + 1$$

$$(M_x + D_x)(M_x - D_x) = -D_x^2 + M_x^2 + 1$$

$$(M_x - D_x)(M_x + D_x) = -D_x^2 + M_x^2 - 1$$
$$(M_x + D_x)(M_x - D_x) = (M_x - D_x)(M_x + D_x) + 2$$
$$(M_x + D_x)(M_x - D_x)^n = (M_x - D_x)^n(M_x + D_x) + 2n(M_x - D_x)^{n-1}$$

On rappelle que si $x \mapsto f(x)$, $f'(x)$, et $xf(x)$ sont toutes les trois dans $\mathcal{R}^1(\mathbb{R})$, alors, en notant ξ la variable pour la transformée de Fourier $\widehat{f}$, on a les relations symboliques $D_\xi = -iM_x$, $M_\xi = -iD_x$. Montrer $M_\xi D_\xi = -D_x M_x$ et :

$$M_\xi + D_\xi = -i(M_x + D_x) \quad \text{ou plus précisément } (M_\xi + D_\xi) \circ \mathcal{F} = -i\mathcal{F} \circ (M_x + D_x)$$
$$M_\xi - D_\xi = +i(M_x - D_x)$$

On considère la fonction $f_0(x) = \exp(-x^2/2)$. Montrer qu'il existe pour chaque n un polynôme H_n (de degré n) tel que :

$$f_n(x) := (M_x - D_x)^n \exp(-x^2/2) = H_n(x)\exp(-x^2/2)$$

Montrer que H_n est pair pour n pair et impair pour n impair et vérifier les premières valeurs :

$$H_0(x) = 1$$
$$H_1(x) = 2x$$
$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$
$$H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

Trouver des choses intéressantes à dire sur les H_n et les f_n :

(i) La transformée de Fourier de $f_n(x)$ est $\widehat{f_n}(\xi) = \sqrt{2\pi}\,(-i)^n f_n(\xi)$.

(ii) On a la récurrence, pour $n \geqslant 2$:

$$H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - 2(n-1)H_{n-2}(x)$$

Ind. : $2M_x = (M_x + D_x) + (M_x - D_x)$.

(iii) Que vaut $H_n(0)$? quel est le coefficient dominant de H_n ?

(iv) Que vaut $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)^2\,dx$? humm… lemmes : $(M_x+D_x)\big(k(x)e^{-x^2/2}\big) = k'(x)e^{-x^2/2}$ et (sous certaines conditions) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(xg(x)-g'(x))\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}(xf(x)+f'(x))g(x)\,dx$.

(v) Plus généralement que valent les produits scalaires :

$$(H_n, H_m) = \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)H_m(x)\,e^{-x^2}\,dx \quad ?$$

(vi) Et que vaut $-f_n''(x) + x^2 f_n(x)$?