Université Lille 1 — UFR de Mathématiques
Licence de Mathématiques (L3, S6, année 2006–2007)

M312 : Séries de Fourier et Espaces de Hilbert

Responsable : Jean-François Burnol

Résumé un peu avant la mi-parcours

1 Ce dont il est question

Seulement cinq semaines de cours derrière nous, et nous sommes quasiment à mi-semestre, juste au bord de basculer dans l'abîme L^2. Car, je le rappelle, ce cours a pour objectif central le théorème de Riesz-Fischer de complétude des espaces L^p, tout particulièrement dans le contexte des séries de Fourier et pour $p = 2$, car nous voulons aussi introduire les notions initiales sur les espaces de Hilbert (bases orthonormées et projections orthogonales). Pour atteindre ces cimes éloignées il est indispensable d'approfondir la maîtrise de la théorie de l'intégration, acquise au premier semestre lors du module sur l'intégrale de Lebesgue. J'espère de tout coeur que ceux d'entre vous qui n'ont pas suivi ce module auront obéi à mes injonctions et utilisé les semaines passées à s'auto-former à la bibliothèque. J'ai par le passé rédigé des compléments que vous trouverez sur mon site sur la toile.[1] Il y en a deux principalement dont je recommande à ce stade (c'est-à-dire une fois que vous aurez lu le présent résumé du cours) la lecture :

1. celui intitulé *Intégrale de Riemann*,
2. et celui intitulé *Convergences dominée et monotone*.

Pour en revenir au sujet de ce résumé, il ne s'agit pas de récapituler dans l'ordre tout ce dont j'ai parlé, vous avez vos notes de cours, mais plutôt de réorganiser dans un ordre autre quelques unes des choses évoquées. En fait je vais même plutôt débuter par ce par quoi on a terminé. On peut même dire que grosso modo je suis l'ordre inverse du cours.

Et avant de me lancer dans cela, je vous rappelle qu'il serait dommage qu'après les examens vous vous disiez « il eût fallu que je fisse par moi-même tous les exercices avant que de me présenter au sévère examen de mes capacités qui fut comploté par mes Professeurs ». Je vois bien que vous travaillez avec intensité lors des travaux dirigés, mais il eût mieux valu que vous eussiez préparé les exercices avant chaque séance, ces dernières semaines. Il est souhaitable que vous vous amélioriez sur ce point à l'avenir.

2 Intégration et Fonctions en escalier

2.a Newton est celui (ou plutôt sûrement l'un de ceux, ces questions historiques sont difficiles et je ne suis pas nécessairement bien informé ; de plus j'emploie un vocabulaire

---

1. `jf.burnol.free.fr/ens.html`
Certains de ces tracts sont plutôt d'un niveau de quatrième année.

totalement anachronique) qui a fait la découverte suivante : considérons un mobile se déplaçant dans le temps, disons sur une droite, avec la position $x(t)$ à l'instant t. Nous pouvons calculer la « fluxion » c'est-à-dire la vitesse instantanée $v(t) = x'(t)$. Représentons le graphe de v en fonction du temps, cela donne une certaine courbe. Alors si $x(0) = 0$, la position $x(t)$ atteinte par le mobile à l'instant t est égale à l'aire délimitée par l'axe des temps et le graphe de la vitesse, les aires pour les vitesses négatives étant comptées négativement. Autrement dit si on connaît la vitesse on récupère la position en calculant une aire, et on sait d'autre part que calculer une vitesse c'est comme calculer une tangente à une courbe.

2.b Ce lien réciproque entre dérivées (le calcul infinitésimal) et calcul d'aires (le calcul intégral) est fondamental mais chacun de ces deux calculs est d'abord une théorie en soit, ce n'est qu'au bout d'un temps qu'on doit les contraster (vous m'accorderez au moins quelques pages pour chacun avant de mentionner l'observation fondamentale de Newton). D'autant plus que les concepts de dérivées et d'intégration ont leurs vies propres. Pour la dérivation on peut penser par exemple à la forme qu'elle prend dans la théorie des distributions (forme déjà anticipée par Riemann ; vous n'êtes pas au courant encore de ce qu'est une distribution, mais vous pourriez le devenir dès aujourd'hui si vous le vouliez, mais ne me demandez pas à moi, les livres, les ressources électroniques, tout vous est ouvert non ?), et pour l'intégration vous savez qu'à côté de l'approche de Riemann, il y a celle développée ensuite par Lebesgue (et d'autres). Si on ne connaît que l'intégrale de Riemann on est souvent contraint à prouver des convergences uniformes. Car en ce qui concerne le théorème de la convergence dominée, même si il est possible d'en produire des preuves assez courtes compréhensibles par quelqu'un qui maîtriserait seulement le formalisme de l'intégrale de Riemann, ces preuves soit contiennent soit incitent en fait fortement à refaire des pans entiers de la théorie de Lebesgue.[2] Et d'ailleurs il y a une difficulté fondamentale c'est que si l'on a des fonctions Riemann-intégrables $f_n(x)$ sur $[a, b]$ et que $f(x) = \lim f_n(x)$ existe pour tout x, alors f n'est pas forcément Riemann-intégrable, même si en plus toutes les f_n sont bornées par une même constante C. Et pourtant f sera Lebesgue mesurable, et sous cette hypothèse additionnelle du type $|f_n| \le C$ pour tous les n, elle sera intégrable et $\int_a^b f(x)\,dx = \lim \int_a^b f_n(x)\,dx$ vaudra par le théorème de la convergence dominée. Pour Riemann, à moins d'aller dans une direction dont la logique (si on voulait la pousser) mènerait à Lebesgue, la seule chose raisonnablement accessible, c'est que si il y a convergence **uniforme** $f_n \rightrightarrows f$ alors f est Riemann intégrable et $\int_a^b f(x)\,dx = \lim \int_a^b f_n(x)\,dx$.

2.c J'ai appris avec stupéfaction que maintenant, dans les classes préparatoires, on ne manipule plus que très peu, voire pas du tout, une notion aussi fondamentale que la convergence **uniforme** ; en fait il semble que l'on autorise aux gens l'utilisation des théorèmes de la convergence dominée et de la convergence monotone, sans aucun mot sur les concepts sous-jacents, et sans même d'ailleurs avoir correctement exposé avant ce qu'est l'intégrale de Riemann.[3] On m'a dit que l'on ressentait l'impact de cela de manière consternante à tous les niveaux des études supérieures scientifiques. Heureusement ici à Lille 1, il y a en deuxième année le cours Suites et Séries qui, en tout cas dans ce contexte des suites et des séries, donne à la notion de convergence uniforme l'importance qu'elle exige.

2.d Pour Riemann je vous rappelle l'existence d'un exposé[4] sur mon site sur la toile

2. lisez mon texte *Convergences dominée et monotone* sur mon site.
3. Il y a encore trois ou quatre ans je participais au cours de première année à Lille 1, et j'y enseignais alors convergence uniforme, intégrale de Riemann, continuité uniforme, etc. . .
4. ce palimpseste est une version élargie de mon texte de **première** année, donc.

informatique mondiale ; passons à Lebesgue (et ensuite vous irez lire aussi mon exposé sur ce même site sur la convergence dominée ou monotone). Où est la notion nouvelle qui fait passer de Riemann et Lebesgue ? Elle est probablement à chercher dans la conception encore plus approfondie de la notion de fonction dans les idées de Cantor sur la théorie des ensembles. Les objets fondamentaux dans la théorie de Lebesgue sont les fonctions $\mathbf{1}_A(x)$ indicatrices d'« ensembles » $A \subset [a, b]$. Une telle fonction qui vaut 1 sur A et 0 ailleurs doit être telle que $\int_a^b \mathbf{1}_A(x)\,dx$ mesure le « poids » de A, si on se représente l'intervalle $[a, b]$ comme une forme idéalisée d'une tige ou d'un bâton de densité uniforme. On s'intéresse donc d'abord à ce problème de « peser » les sous-ensembles de l'intervalle $[a, b]$. Riemann avait déjà indiqué ce que cela voulait dire d'avoir un « poids » nul (je dirai dorénavant, « mesure », et non plus « poids »). Borel a dégagé ensuite dans un autre contexte la notion fondamentale d'additivité dénombrable liée à ce problème de la mesure de parties plus générales ; cet autre contexte est aussi celui du calcul des probabilités.

2.e Cela mène à la notion de tribu [5] (aussi appelée sigma-algèbre) de sous-ensembles de $[a, b]$ et à la notion de mesure, comme fonction d'ensemble sigma-additive sur une tribu. La tribu de Borel est la plus petite tribu contenant tous les intervalles. La tribu de Lebesgue est la plus petite tribu contenant en sus tous les ensembles de mesure nulle (au sens de Riemann). Une fonction $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ est dite mesurable si l'image réciproque de tout intervalle est Lebesgue-mesurable [6]. On peut étendre ce concept à des fonctions f pour lesquelles les valeurs $+\infty$ et $-\infty$ sont autorisées. Si toutes les f_n sont mesurables et si $\lim f_n(x)$ existe pour tout x alors $f = \lim f_n$ est aussi mesurable. Pour toute fonction mesurable f **à valeurs positives** $\int_a^b f(x)\,dx$ est définie comme étant le supremum (éventuellement égal à $+\infty$) des $\int_a^b \phi(x)\,dx$ pris sur toutes les fonctions **étagées** vérifiant $0 \leq \phi \leq f$, les $\int_a^b \phi(x)\,dx$ étant définies au préalable en revenant à la notion de mesure $\mu(A)$ d'une partie mesurable. Si on ne suppose plus $f \geq 0$ mais que $\int_a^b |f(x)|\,dx < \infty$, alors la théorie donne aussi un sens à $\int_a^b f(x)\,dx$ (aussi pour f à valeurs complexes en séparant parties réelle et imaginaire). [7] **Une fonction est dite intégrable si elle est mesurable et si $\int_a^b |f(x)|\,dx < \infty$.**

2.f Les fonctions de base sont donc les fonctions **étagées**, c'est-à-dire les combinaisons linéaires finies de fonctions indicatrices de parties mesurables. De manière équivalente ce sont les fonctions mesurables ne prenant qu'un nombre fini de valeurs distinctes.

2.g Parmi celles-ci on a la sous-classe des fonctions en **escalier** : les combinaisons linéaires finies de fonctions indicatrices d'intervalles. Et on peut présenter la théorie de Riemann de la manière suivante : f à valeurs réelles est Riemann-intégrable si pour tout $\epsilon > 0$ on peut trouver U et V en escalier avec $U \leq f \leq V$ et $\int_a^b (V(x) - U(x))\,dx \leq \epsilon$ (on définit directement l'intégrale d'une fonction en escalier). [8] Comme ici $0 \leq f - U \leq V - U$ on a aussi $\int_a^b |f(x) - U(x)|\,dx \leq \epsilon$.

2.h Le théorème le plus profond et le plus important que nous ayons établi jusqu'à présent est que cela reste valable aussi pour les fonctions Lebesgue-intégrables :
Pour toute fonction f Lebesgue-intégrable et pour tout $\epsilon > 0$ il existe une fonction en escalier U telle que $\int_a^b |f(x) - U(x)|\,dx \leq \epsilon$.

---

5. je ne reproduis pas ici les axiomes ; voir vos notes, ou le matériel sur mon site
6. si ces images réciproques sont toutes Borel-mesurables, on dit que f est Borélienne.
7. pour f à valeurs réelles on écrit $f = f^+ - f^-$ avec $f^+ = \max(f, 0)$ et $f^- = \max(-f, 0)$.
8. si on impose la condition plus forte du type $\forall x\ V(x) - U(x) \leq \epsilon$, on obtient la classe des fonctions qui sont limites uniformes de fonctions en escalier. Ce sont les fonctions dites réglées. Mais il existe des fonctions intégrables au sens de Riemann qui ne sont pas réglées.

On a vu en exercice comment approcher une fonction en escalier par une fonction continue (au sens de la norme L^1). Et donc :
Pour toute fonction f Lebesgue-intégrable et pour tout $\epsilon > 0$ il existe une fonction continue g sur $[a, b]$ telle que $\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx \leq \epsilon$.

2.i Et réciproquement en utilisant la continuité uniforme des fonctions continues sur les intervalles fermés finis, on pourrait revenir à l'énoncé précédent. Ces deux énoncés sont donc mutuellement équivalents, modulo le passage par des raisonnements très élémentaires.[9]

2.j Petite remarque : pour les fonctions 2π périodiques on vérifie en regardant la démonstration (demandée dans l'une des feuilles d'exercices) que l'approximation au sens L^1 sur $[0, 2\pi]$ d'une fonction en escalier périodique peut se faire avec des fonctions continues et elles aussi 2π-périodiques (c'est-à-dire que l'on peut se débrouiller pour avoir $g(2\pi) = g(0)$).

2.k J'ai donc très brièvement rappelé plusieurs éléments essentiels relatifs au Cours d'Intégration. Il ne faut surtout pas s'y limiter à l'intégration de fonctions sur un intervalle. Par exemple une série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ à termes positifs, ou encore absolument convergente, est aussi une intégrale de Lebesgue, avec comme espace mesuré $\mathbf{N}$ et la fonction intégrée est $f : n \mapsto u_n$. Le théorème de la convergence dominée dans ce contexte est un théorème bien connu sur les séries dépendant d'un paramètre, que l'on appelle traditionnellement le théorème de Tannery. Il y a aussi la possibilité de prendre comme espace mesuré un produit cartésien $[a, b] \times [c, d]$ (et la tribu de Lebesgue correspondante) ce qui mène aux intégrables doubles $\iint f(x, y)dxdy$. Il existe alors un théorème d'un emploi constant en Analyse : le **théorème de Fubini-Tonelli**. Je ne considère pas qu'il ressortisse à ma responsabilité d'en donner ici l'énoncé, vous ne pouvez pas imaginer le temps que prend de taper au clavier toutes ces choses, et répéter ce qui, dans notre monde de la connaissance électroniquement accessible, sans même parler de la bibliothèque qui est à deux cents mètres, répéter donc ce qui déjà infiniment accessible, ça ne m'intéresse pas. À ce stade cela relève uniquement et exclusivement de **votre** propre responsabilité.

3 Où l'on révèle La Preuve au Monde

3.a Pas tellement pour vous, car vous avez vos notes, mais pour les professionnels qui m'espionnent secrètement, je rappelle la méthode utilisée pour la densité L^1 des fonctions en escalier. À propos j'ai oublié de faire la pause pour introduire les espaces $\mathcal{L}^1(a, b; dx)$ et $L^1(a, b; dx)$, quotient du précédent par la relation d'équivalence « être presque partout égales », et la norme $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\, dx$. Rappelez vous ce qu'est une norme, et pourquoi on est obligé de passer à L^1. Rappelez-vous aussi que lorsque l'on dit « soit f dans L^1 », presque toujours on veut dire en fait « soit $f \in \mathcal{L}^1$ », parce que l'on veut avoir une vraie fonction, pas une classe d'équivalence. L'espace vectoriel normé L^1 est un espace métrique, et cela a un sens de dire d'un sous-ensemble qu'il est dense. Alors prouvons que les fonctions en escalier sont denses. Je présente la chose d'une manière un tout petit peu différente qu'en cours :

1. d'abord on montre que les fonctions bornées sont denses,

9. si on considère que la continuité uniforme d'une fonction continue sur $[a, b]$ rentre dans cette catégorie « élémentaire ». À propos, mais je vais me faire mal là, vous avez bien compris que le mot « uniforme » n'est pas ici pour faire référence à la limite « uniforme » d'une suite de fonctions... on a le droit d'utiliser le même mot pour des choses différentes, surtout lorsqu'elles ont tout de même un air de famille, ici l'ordre de certains quantificateurs.

2. puis on montre que les fonctions étagées sont denses,

3. enfin on montre que les fonctions en escalier sont denses, en prouvant que les parties mesurables $A \subset [a, b]$ telles que $\mathbf{1}_A$ est dans leur adhérence forment une tribu. Comme cette tribu contient les négligeables (parties de mesure nulle) et les intervalles, elle contient tout. Les combinaisons linéaires finies que sont les fonctions étagées sont alors aussi dans l'adhérence des fonctions en escalier, et par ce qui précède on a fini.

Première étape : soit $f \in \mathcal{L}^1$ et $f_n(x) = f(x)$ pour $|f(x)| \le n$, $= 0$ sinon (pour $n \in \mathbf{N}$). Comme $|f - f_n| \le |f|$ et que $\forall x \ \lim |f(x) - f_n(x)| = 0$ on a par le théorème de la convergence dominée $\lim \|f - f_n\|_1 = 0$.

Deuxième étape : soit f bornée. Il suffit de savoir approcher $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ par des fonctions étagées, donc on peut supposer f à valeurs réelles. Disons que $-C \le f \le +C$, avec $C > 0$. On définit pour x donné $f_n(x)$ comme valant $\frac{k}{2^n}C$ avec k l'unique entier tel que $\frac{k}{2^n}C \le f(x) < \frac{k}{2^n}C + \frac{1}{2^n}C$. La fonction f_n est étagée et on a $0 \le f - f_n < \frac{1}{2^n}C$, donc $\|f - f_n\|_1 \le (b - a)\frac{1}{2^n}C$.

Troisième étape : comme expliqué il suffit maintenant pour terminer de montrer que les A telles que $\mathbf{1}_A$ est dans l'adhérence des fonctions en escalier forment une tribu ; car il est évident que les intervalles ainsi que les ensembles négligeables y sont. Le passage au complémentaire marche, c'est facile. Il suffit maintenant de traiter le cas d'une union dénombrable croissante $A = \bigcup_n A_n$ et celui d'une union finie. Pour l'union croissante on a $A_n \subset A$, $\|\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_{A_n}\|_1 = |A| - |A_n|$ et cela tend vers zéro à cause (d'une des formes) de la σ-additivité de la mesure de Lebesgue (notée ici $|\cdot|$). On choisit un n avec $\|\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_{A_n}\|_1 \le \frac{\epsilon}{2}$ et U en escalier avec $\|\mathbf{1}_{A_n} - U\|_1 \le \frac{\epsilon}{2}$. Terminé pour l'union croissante. Bon ne reste plus que le cas d'une union finie qui par récurrence se réduit à celui d'une union de deux. Par passage au complémentaire il suffit en fait de traiter le cas d'une intersection $E = C \cap D$. Alors $\mathbf{1}_E = \mathbf{1}_C \cdot \mathbf{1}_D$. On prend U en escalier avec $\|\mathbf{1}_C - U\|_1 \le \frac{\epsilon}{2}$ et V en escalier avec $\|\mathbf{1}_D - V\|_1 \le \frac{\epsilon}{2}$. Le produit UV est une fonction en escalier et

$$\mathbf{1}_E - UV = (\mathbf{1}_C - U)\mathbf{1}_D + U(\mathbf{1}_D - V)$$

donc $\|\mathbf{1}_E - UV\|_1 \le \frac{\epsilon}{2} + \sup|U| \ \frac{\epsilon}{2}$. Il nous suffira donc pour conclure de nous assurer que le choix de U peut être fait de sorte que $\sup|U| \le 1$. En fait on va montrer que l'on peut modifier U de sorte que $0 \le U \le 1$. Pour cela on remplace d'abord U par $\mathrm{Re}(U)$ ce qui ne peut pas augmenter $\|\mathbf{1}_C - U\|_1$. Ensuite pour chaque sous-intervalle J d'une subdivision adaptée à U, on regarde la valeur constante α prise par U. Si $\alpha \ge 1$ alors $\forall x \in J \ |\mathbf{1}_C(x) - 1| \le |\mathbf{1}_C(x) - \alpha|$ donc on remplace α par 1, et si $\alpha \le 0$ alors $\forall x \in J \ |\mathbf{1}_C(x)| \le |\mathbf{1}_C(x) - \alpha|$ et on remplace α par 0. Une fois tous ces changements éventuels effectués on n'a en tout cas pas augmenté $\|\mathbf{1}_C - U\|_1$ et maintenant $0 \le U \le 1$.

Cela termine la preuve de la densité L^1 des fonctions en escalier.

3.b Remarque utile pour la suite. En reprenant la technique de modification de U on a plus généralement : soit f bornée par C alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe U en escalier telle que $\|f - U\|_1 \le \epsilon$ et $\sup|U| \le C$. C'est vrai même pour f à valeurs complexes, une méthode pour le montrer est expliquée dans l'une des feuilles d'exercices.

4 Le cas L^2

4.a Bon, on a aussi défini $\mathcal{L}^2(a,b;dx)$ et $L^2(a,b;dx)$. Toujours le même passage au quotient. Et puis on a la norme L^2 :

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\,dx}$$

Prouver que c'est une norme exige d'établir que si f et g sont dans $\mathcal{L}^2$ alors $f+g$ aussi et

$$\|f+g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$$

Alors ça, c'est pas évident. On est passé pour le montrer par l'intermédiaire de **Cauchy-Schwarz** : la fonction [10] $f(x)g(x)$ est dans $\mathcal{L}^1$ et

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leq \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\,dx}\sqrt{\int_a^b |g(x)|^2\,dx}$$

On pourrait avoir une autre mesure (positive) que la mesure de Lebesgue : [11]

$$\left|\int_{[a,b]} f(x)g(x)\,d\mu(x)\right| \leq \int_{[a,b]} |f(x)g(x)|\,d\mu(x) \leq \sqrt{\int_{[a,b]} |f(x)|^2\,d\mu(x)}\sqrt{\int_{[a,b]} |g(x)|^2\,d\mu(x)}$$

On utilisera cela surtout dans le cas trivial $d\mu(x) = \frac{1}{b-a}\,dx$ et en fait pour $a=0$, $b=2\pi$.

4.b Une remarque intéressante découle de Cauchy-Schwarz avec $g=1$: si $f \in \mathcal{L}^2(a,b;dx)$ alors $f \in \mathcal{L}^1(a,b;dx)$ et $\|f\|_1 \leq \sqrt{b-a}\|f\|_2$. D'ailleurs là on voit bien l'intérêt de travailler plutôt avec $L^1(a,b\,;\frac{dx}{b-a})$ et $L^2(a,b\,;\frac{dx}{b-a})$ car on obtient avec cette nouvelle normalisation des normes (attention nouvelles normes pour L^1 et pour L^2) :

$$\forall f \in L^2(a,b\,;\frac{dx}{b-a}) \qquad \|f\|_1 \leq \|f\|_2$$

J'utiliserai ces normes avec $\frac{dx}{b-a}$ et non plus les anciennes avec dx. Ainsi $\|1\|_1 = 1$, $\|1\|_2 = 1$.

4.c Il existe bien sûr (?! non ne dites rien) des fonctions L^1 qui ne sont pas L^2, donc en un certain sens L^2 est un sous-ensemble strict de L^1, mais il est assez peu utile de vraiment s'imaginer $L^2 \subset L^1$ (d'autant plus que rien de tel n'existe sur un intervalle infini). Il vaut mieux se dire que l'on a un morphisme d'injection canonique $\iota : L^2 \to L^1$, vérifiant $\forall f\ \|\iota(f)\|_1 \leq \|f\|_2$, et puis très vite on laisse tomber le ι de la notation.

4.d Je vais montrer que les fonctions en escalier sont denses aussi dans L^2. Soit f de carré intégrable et $f_n(x) = f(x)$ si $|f(x)| \leq n$, $= 0$ sinon. On a $|f - f_n| \leq |f|$ donc $|f-f_n|^2 \leq |f|^2$ et de plus pour tout x on a $\lim |f(x) - f_n(x)| = 0$. Donc par le théorème de la convergence dominée $\lim \int_a^b |f(x) - f_n(x)|^2\,dx = 0$, donc $\lim \|f - f_n\|_2 = 0$. Donc

10. en fait c'est plutôt $f\overline{g}$ que l'on regarde dans la preuve de l'inégalité triangulaire via le passage par la forme sesquilinéaire $(f,g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx$.

11. je n'aime pas la notation $\mu(dx)$ (que faites vous si vous êtes sur un espace mesuré général ?) mais je reconnais qu'ici à la place de $d\mu(x)$ il serait peut-être plus logique d'écrire $dF(x)$ avec $F(x) = \mu([a,x])$. En ce qui concerne le passage de la notation $\int_a^b$ à la notation $\int_{[a,b]}$ vous y réfléchirez.

les fonctions bornées sont denses au sens L^2. Il suffit donc de montrer que l'adhérence des fonctions en escalier contient toutes les fonctions bornées.

4.e Soit f une telle fonction bornée, soit $C = \sup|f|$, soit $\epsilon > 0$ et soit U en escalier avec $\|f-U\|_1 \leq \epsilon$. On a dit que l'on pouvait imposer de plus $\sup|U| \leq C$. Donc $|f-U| \leq 2C$ et $|f-U|^2 \leq 2C|f-U|$ et $\|f-U\|_2^2 \leq 2C\|f-U\|_1 \leq 2C\epsilon$, donc $\|f-U\|_2 \leq \sqrt{2C\epsilon}$. Remarquez bien que le C ne dépend que de f. Donc f est dans l'adhérence des fonctions en escalier.

4.f Montrons que les fonctions continues sont denses dans L^2. Il suffit donc de montrer que pour toute fonction en escalier V et tout $\epsilon > 0$ on peut trouver g continue avec $\|V-g\|_2 \leq \epsilon$. Il suffit (grâce à l'inégalité triangulaire) de le faire lorsque V est à valeurs réelles. Regardez alors l'exercice où l'on vous a demandé de faire cela pour la norme L^1. Vous verrez que la fonction construite g, qui dépend d'un paramètre η est telle que $-\sup|V| \leq g \leq \sup|V|$. Donc en tout cas $|V-g| \leq 2\sup|V|$ et encore une fois $\|V-g\|_2 \leq (2\sup|V|\,\|V-g\|_1)^{1/2}$. On peut rendre le terme de droite arbitrairement petit en choisissant convenablement η (donc g), donc aussi le terme de gauche (et si on avait été moins fainéant on aurait calculé exactement $\|V-g\|_2 \ldots$).

5 Fonctions 2π-périodiques : convolution et Fourier

Nous continuons notre déconstruction de morceaux du Cours.

5.a Pour une fonction f qui est 2π-périodique, intégrable sur une période, nous avons défini ses coefficients de Fourier :

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt$$

Il y a aussi les a_n et b_n mais je ne reviens pas dans ce résumé sur ces questions annexes élémentaires même si elles sont parfois évidemment fondamentales[12]. À propos lorsque je dirai d'une fonction 2π-périodique qu'elle est intégrable, cela voudra dire qu'elle est intégrable (au sens de Lebesgue) sur une période.

5.b Si f et g sont deux fonctions 2π-périodiques intégrables alors rien ne garantit que $f(t)g(t)$ soit intégrable. Mais, si l'on applique à la fonction de deux variables $F(x,t) = f(x-t)g(t)$ le théorème de Fubini, on s'aperçoit que celui-ci permet d'affirmer que pour **presque tout** x, la fonction $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est intégrable. Cela définit **pour presque tout x la convolution** :

$$(f*g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)\,dt$$

Le changement de variable $t \mapsto x-t$ donne $f*g = g*f$[13]. Et toujours grâce au théorème de Fubini $f*g$ est intégrable. On obtient d'ailleurs :

$$\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$$

5.c Toujours par Fubini $c_0(f*g) = c_0(f)c_0(g)$ et d'ailleurs à cause de l'inégalité évidente $|f*g| \leq |f|*|g|$, cela entraîne à nouveau $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$. On a plus généralement

$$\forall n \in \mathbf{Z} \quad c_n(f*g) = c_n(f)c_n(g)$$

12. **En particulier je ne m'attarde pas sur les relations d'orthogonalité pour les $e_n(x) = e^{inx}$.**
13. on peut aussi montrer que la convolution est une opération associative.

5.d Bon alors tout ce que je viens de dire, vous savez que je l'ai relégué à un exercice ; en cours j'avais travaillé avec des fonctions Riemann-intégrables, et je m'étais débrouillé pour tout faire sans le théorème de Fubini, sans intégrales doubles. La situation était un peu plus simple car si f et g sont Riemann-intégrables leur produit l'est aussi, donc $(f * g)(x)$ existe pour tout x. Cependant il a fallu ruser pour établir $c_0(f*g) = c_0(f)c_0(g)$. À l'époque on s'est bien amusé avec des fonctions en escalier, des limites uniformes, etc. . . en effet, et d'ailleurs même si f n'est pas Riemann-intégrable mais seulement bornée alors $f * g(x)$ est défini pour tout x, et $|f*g| \leq \sup|f| \cdot \|g\|_1$. Donc si $G_n \to g$ au sens L^1 alors $f*G_n \rightrightarrows f*g$. On a travaillé avec ce genre de choses et quelques astuces.

5.e Pour toute fonction intégrable, la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ est une fonction continue de x (voir exercice). Il est alors facile de montrer que $f * V$ est une fonction continue pour toute fonction en escalier V. En combinant avec la remarque ci-dessus, et en utilisant la densité L^1 des fonctions en escalier, on peut alors montrer que pour toute fonction f bornée, et n'importe quelle fonction intégrable g, la fonction $f*g$ est une fonction continue. Un autre cas de figure (il y aura un exercice dessus) est celui de la convolution de deux fonctions de L^2. Par Cauchy-Schwarz, $f * g$ existe pour tout x, et on peut aussi montrer que $f * g$ est une fonction continue de x dans ce cas.

5.f Par exemple si f est une fonction continue, elle est bornée, et donc $f * g$ est une fonction continue. Mais vous pourriez prouver cela très facilement en exploitant la continuité uniforme de f, je vous laisse le faire. En fait on l'a vu déjà en exercice et aussi nous avons montré que si f est C^1 (resp. C^2, etc. . .) $f * g$ est automatiquement C^1 (resp. C^2, etc. . .).

6 Approximations de l'identité et théorèmes de convergence

6.a On dira que des fonctions 2π-périodiques $k_n(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$ forment (dans le cadre des fonctions 2π-périodiques) une « approximation de l'identité » si :

1. $\forall n \geq 1 \quad \int_{-\pi}^{+\pi} k_n(t)\frac{dt}{2\pi} = 1$,
2. il existe une constante C avec $\forall n \geq 1 \quad \int_{-\pi}^{+\pi} |k_n(t)|\frac{dt}{2\pi} \leq C$,
3. et pour tout $0 < \delta < \pi$ on a $k_n \overset{[-\pi,+\pi]\setminus]-\delta,+\delta[}{\Longrightarrow} 0$

6.b Il est très facile de construire une approximation de l'identité, on prend une fonction quelconque k intégrable avec $\int_{-\pi}^{\pi} k(t)\frac{dt}{2\pi} = 1$, et on pose $k_n(t) = nk(nt)$ pour $|t| < \frac{1}{n}\pi$, $k_n(t) = 0$ si $\frac{1}{n}\pi \leq |t| \leq \pi$ et on prolonge par 2π-périodicité. Remarquez qu'alors on a $k_n = 0$ sur $[-\pi, +\pi]\setminus] - \delta, +\delta[$ pour tout n suffisamment grand et tout $\delta > 0$ fixé. Comme on peut prendre k de classe C^∞, avec support dans $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ par exemple[14], il existe des approximations de l'identité avec des k_n de classe C^∞. D'ailleurs nous parlerons sous peu de la remarquable approximation de l'identité donnée par les noyaux de Fejér :

$$F_n(x) = \frac{\sin^2(\frac{nx}{2})}{n\sin^2(\frac{x}{2})} = \sum_{|k|\leq n}(1 - \frac{|k|}{n})e^{ikx}$$

6.c Lorsque l'on a une approximation de l'identité une envie irrépressible nous prend de former les convolutions $k_n * f$. Une petite remarque subtile (que je fais uniquement à

14. on a sûrement dû à un moment vous parler par exemple de la fonction $\exp(-1/x(1-x))$ $(= 0$ pour $x < 0$ ou $x > 1)$ qui est C^∞ à support compact.

cause d'un énoncé qui va suivre) c'est que dès que f est bornée au voisinage d'un x alors $(k_n * f)(x)$ existe pour ce x et pour tout n grand, je vous laisse réfléchir pourquoi, d'ailleurs ça n'a pas tellement d'intérêt, en fait souvent les k_n elles-mêmes sont bornées (pour chaque n, pas indépendamment de n), donc $(k_n * f)(x)$ existe alors pour tout x et tout n.

6.d On a des théorèmes de convergence fondamentaux, lorsque l'on a une fonction f intégrable 2π-périodique et une approximation de l'identité :

1. ***si f est continue au point x_0 alors*** $\lim (k_n * f)(x_0) = f(x_0)$***,***
2. ***si f est une fonction continue 2π-périodique alors $k_n * f \rightrightarrows f$,***
3. ***pour toute f on a*** $\lim \|f - k_n * f\|_1 = 0$***.***

Ce sont donc des théorèmes *de convergence ponctuelle*, *de convergence uniforme*, et *de convergence au sens L^1*.

6.e Avant de rappeler comment l'on fait (surtout qu'en cours, je pense que l'on en était encore à utiliser des fonctions intégrables au sens de Riemann, alors faut s'assurer que c'est valable plus généralement), remarquez que le point 3 combiné à nos remarques précédentes permet d'affirmer que non seulement les fonctions continues, mais même les fonctions C^∞ 2π-périodiques sont denses au sens L^1. On a même beaucoup mieux en utilisant les noyaux de Fejér ; en effet on a les formules fondamentales $f * e_n = c_n(f)e_n$ (avec $e_n(x) = e^{inx}$) donc

$$f * F_n = \sum_{|k|\leq n} (1 - \frac{|k|}{n}) c_k(f) e_k$$

est un *polynôme trigonométrique* et nous obtenons que les **polynômes trigonométriques sont denses dans L^1.**

6.f Les points 1 et 2, je ne reviens pas sur leurs preuves. En ce qui concerne le point 3 il est intimement lié à la densité L^1 des fonctions continues. En effet soit f quelconque et soit g continue quelconque :

$$\begin{aligned}
\|f - k_n * f\|_1 &\leq \|f - g\|_1 + \|g - k_n * g\|_1 + \|k_n * g - k_n * f\|_1 \\
\|f - k_n * f\|_1 &\leq \|f - g\|_1 + \sup |g - k_n * g| + \|k_n\|_1 \|g - f\|_1 \\
\|f - k_n * f\|_1 &\leq (1 + C)\|f - g\|_1 + \sup |g - k_n * g|
\end{aligned}$$

Par le point 2 on a $\lim_{n\to\infty} \sup_{[-\pi,+\pi]} \ |g - k_n * g| = 0$, donc

$$\forall g \text{ continue } \varlimsup_{n\to\infty} \|f - k_n * f\|_1 \leq (1 + C)\|f - g\|_1$$

C'est donc la densité L^1 des fonctions continues qui permet d'établir $\lim \|f - k_n * f\|_1 = 0$.

6.g Il est très facile de construire une approximation de l'identité avec chacune des k_n bornée, les $k_n * f$ sont alors toutes des fonctions continues. Ainsi et réciproquement le point 3 (sans même connaître Fejér) confirme que les fonctions continues sont denses dans L^1.

7 Séries de Fourier et Théorèmes de Fejér

7.a On spécialise les théorèmes *de convergence ponctuelle*, *de convergence uniforme*, et *de convergence au sens L^1* au cas de l'approximation de l'identité donnée par les $F_n(x) = \sum_{|k|\leq n}(1 - \frac{|k|}{n})e^{ikx}$. Comme les F_n sont paires, on peut améliorer le théorème de convergence ponctuelle : si $L = \lim_{h\to 0} \frac{1}{2}(f(x_0+h)+f(x_0-h))$ existe alors $\lim_{n\to\infty}(F_n * f)(x_0) = L$. En particulier si $f(x_0^+)$ et $f(x_0^-)$ existent $\lim_{n\to\infty}(F_n * f)(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0^+)+f(x_0^-))$.

7.b Comme les $F_n * g$ sont des polynômes trigonométriques on obtient que toute fonction continue périodique est approchable arbitrairement bien au sens de la convergence uniforme par des polynômes trigonométriques.

7.c Et surtout, pour toute fonction intégrable on a $F_n * f \to f$ au sens L^1. Donc si $\forall n\ c_n(f) = 0$ alors $f = 0$, c'est-à-dire f est nulle presque partout. Et si deux fonctions ont les mêmes coefficients de Fourier elles sont égales presque partout : c'est le **théorème d'unicité.** Imaginons par exemple que l'on constate que $\sum_{n\in\mathbf{Z}} |c_n(f)| < \infty$, alors f et la fonction continue $g(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n(f)e^{inx}$ ont les mêmes coefficients de Fourier donc sont égales presque partout. Ainsi $f(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n(f)e^{inx}$ en tout point de continuité.

8 Séries de Fourier et convergence ponctuelle

8.a La série de Fourier d'une fonction intégrable f est $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n(f)e^{inx}$. Notons $S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx}$. On a $S_n(f) = D_n * f$ avec $D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin\frac{x}{2}}$. De plus :

$$F_n * f = \frac{D_0 * f + D_1 * f + D_2 * f + \cdots + D_{n-1} * f}{n}$$

Donc par le théorème de Cesàro si $\lim_{n\to\infty} S_n(f)(x)$ existe et vaut L alors $\lim_{n\to\infty}(F_n * f)(x) = L$ aussi. Cependant on sait que la continuité de f au point x_0 ne suffit pas pour assurer la convergence de $S_n(f)(x_0)$ (exemple de Du Bois-Reymond, 1876).

8.b Nous avons montré : *si $f(x_0^+)$ et $f(x_0^-)$ existent et si il y a une dérivée à droite et une à gauche en x_0 alors* $\lim S_n(f)(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0^+)+f(x_0^-))$. En conséquence si f est de classe C^1 par morceaux la série de Fourier converge pour tout x vers $\frac{1}{2}(f(x^+)+f(x^-))$. On appelle cela le **Théorème de Dirichlet**, mais les hypothèses de Dirichlet étaient autres.

8.c En tout cas si $f_1 = f_2$ dans un voisinage (aussi petit soit-il) de x_0 alors les séries de Fourier de f_1 et de f_2 au point x_0 convergent ou divergent ensemble : c'est le **théorème de localisation** (de Riemann). Il suffit d'appliquer le critère de convergence à $f_1 - f_2$.

9 Le Lemme de Riemann-Lebesgue

C'est l'outil technique central pour la preuve du théorème de convergence ponctuelle : si f est intégrable sur l'intervalle $[a,b]$ alors $\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}\,dx = 0$ (et idem avec $\lim_{\lambda\to-\infty}$) (et ça marche aussi avec un intervalle infini). Noter en particulier que pour toute fonction 2π-périodique intégrable f on a $\lim_{n\to\pm\infty} c_n(f) = 0$. L'idée pour la preuve a été à nouveau d'exploiter la densité L^1 des fonctions en escalier. C'est d'ailleurs comme cela que dans le déroulement du cours l'importance de ce théorème est initialement apparue.

Théorème de Lebesgue. Si f est L^1 alors $(F_n * f)(x) \to f(x)$ pour presque tout x.
Théorème de Kolmogorov. Il existe $f \in L^1$ telle que sa série de Fourier ne converge pour aucun x.
Possibilité de la non-convergence au sens L^1 de la série de Fourier. Un dernier petit mot sur L^1 : il existe des fonctions f intégrables telles qu'il soit faux que $D_n * f \to f$ au sens L^1 (une telle fonction ne peut pas être bornée, car si elle l'était elle serait L^2 et alors, comme nous le verrons, $D_n * f \to f$ au sens L^2 donc aussi au sens L^1 par Cauchy-Schwarz). Je donne un exemple : $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} F_{2^{3^k}}(x)$. On peut prouver que les normes L^1 des $D_n * f$ ne sont pas bornées indépendamment de n.

