Université Lille 1 — UFR de Mathématiques
Licence de Mathématiques (L3, S6, année 2006–2007)

M312 (« Analyse Hilbertienne »)

Corrigé de l'examen du 29 mars 2007
durée : 2 heures ; ni documents ni calculatrices

(5 pts) **A.** On rappelle que $D_n(t) = 1 + \sum_{k=1}^n 2\cos(kt) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{1}{2}t)}$.

1. Donner trois formules correspondant au noyau de Fejér $F_n(t)$: expression avec les $D_k(t)$, expression avec les $\cos(kt)$, expression explicite montrant $F_n(t) \geq 0$. Justifier $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi F_n(t)\,dt = 1$.
2. On définit une fonction g sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = \begin{cases} 1 & (x = 0) \\ \frac{x^2}{\sin^2(x)} & (0 < x \leq \frac{\pi}{2}) \\ 0 & (\frac{\pi}{2} < x) \end{cases}$.
   Montrer qu'il existe une constante C telle que $\forall x \geq 0 \quad 0 \leq g(x) \leq C$.
3. Prouver
$$\forall n \in \mathbf{N}, n \geq 1 \qquad \int_0^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^2} g(\frac{x}{n})\,dx = \frac{\pi}{2}$$
4. En déduire $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$

Corrigé :

1. Les trois formules sont
$$F_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(t) = 1 + \sum_{k=1}^{n}(1 - \frac{k}{n})\,2\cos(kt) = \frac{\sin^2(\frac{nt}{2})}{n\sin^2(\frac{t}{2})}$$
   Compte tenu de $\int_0^\pi \cos(kt)\,dt = 0$ pour $k \geq 1$ on obtient par la deuxième formule $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi F_n(t)\,dt = 1$. Attention au fait que dans la deuxième formule le terme en $\cos(nt)$ a en réalité un coefficient nul. On aurait pu écrire $\sum_{k=1}^{n-1}$ au lieu de $\sum_{k=1}^{n}$. Pour $n = 1$ $\sum_{k=1}^{n-1}$ doit bien sûr être considéré comme une sommation vide, donc nulle.
2. On remarque que g ainsi définie est continue en $x = 0$, et bien sûr continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$. Elle est donc continue sur l'intervalle fermé borné $[0, \frac{\pi}{2}]$ et par conséquent bornée sur cet intervalle par un certain C fini. Comme elle est nulle pour $x > \frac{\pi}{2}$ ce C marche. On peut aussi rappeler que la fonction $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est décroissante sur $]0, \pi]$, c'est une manifestation de la concavité de $\sin(x)$ sur cet intervalle. D'où la minoration classique $\frac{\sin(x)}{x} \geq \frac{2}{\pi}$ sur $]0, \frac{\pi}{2}]$. On peut donc prendre $C = \frac{1}{4}\pi^2$.
3. Soit $n \geq 1$. Soit $I_n = \int_0^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^2} g(\frac{x}{n})\,dx = \int_0^{n\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(x)}{x^2} g(\frac{x}{n})\,dx$. On fait le changement de variable $x = n\frac{t}{2}$. Alors $I_n = \int_0^\pi \frac{\sin^2(n\frac{t}{2})}{n^2(t/2)^2} \frac{(t/2)^2}{\sin^2(t/2)} \frac{n}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{\sin^2(n\frac{t}{2})}{n\sin^2(\frac{t}{2})}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi F_n(t)\,dt = \frac{\pi}{2}$.
4. Pour tout $x \geq 0$ on a $\lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0$ donc par continuité de g en 0 : $\lim_{n\to\infty} g(\frac{x}{n}) = g(0) = 1$. On peut invoquer le théorème de la convergence dominée puisque pour $x > 0$, n entier ≥ 1, on a $0 \leq \frac{\sin^2(x)}{x^2} g(\frac{x}{n}) \leq C\ \frac{\sin^2(x)}{x^2}$ et on sait évidemment que $\int_0^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,dx < \infty$. Donc on obtient $\int_0^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,dx = \lim \int_0^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^2} g(\frac{x}{n})\,dx = \frac{\pi}{2}$.

(8 pts) **B.** Dans cet exercice on a au départ un paramètre a, $0 < a \leq \pi$. On lui associe la fonction 2π-périodique, définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leq x \leq 0) \\ 1 & (0 < x < a) \\ 0 & (a \leq x \leq \pi) \end{cases}$$

1. Prouver $c_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\sin(na/2)}{n}e^{-ina/2}$ pour $n \neq 0$. Que vaut $c_0(f)$?
2. Que vaut $\lim_{N\to\infty} S_N(f)(0)$? En déduire $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)}{n} = \frac{\pi-a}{2}$ (pour $0 < a \leq \pi$).
3. On revient à f. En calculant $\sum_{n\in\mathbf{Z}} |c_n(f)|^2$ établir pour $0 < a \leq \pi$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(na)}{n^2} = \frac{a(2\pi - a)}{4}$$

   Montrer que cette formule vaut pour $0 \leq a \leq 2\pi$.
4. En déduire en le justifiant $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{a(2\pi - a)}{4}\, da = \frac{\pi^2}{6}$.
5. Déterminer ensuite la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

Corrigé :

1. Pour $n \neq 0$ on a $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^a e^{-int}\, dt = \frac{1}{2\pi}[\frac{1}{-in}e^{-int}]_0^a = \frac{1}{2\pi in}(1 - e^{-ina}) = \frac{1}{2\pi in}e^{-ina/2}(e^{ina/2} - e^{-ina/2}) = \frac{1}{\pi n}\sin(\frac{na}{2})e^{-ina/2}$. Et $c_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^a 1\, dt = \frac{a}{2\pi}$.
2. En $x = 0$ la fonction f a une limite à droite et une limite à gauche et une dérivée à droite et une dérivée à gauche (calculées en utilisant respectivement $f(0^+)$ et $f(0^-)$). Donc on sait que la suite $S_N(f)(0)$ converge et que sa limite vaut $\frac{1}{2}(0 + 1) = \frac{1}{2}$. Donc

$$\frac{1}{2} = c_0(f) + \lim_{N\to\infty} \sum_{1\leq k\leq N} (c_k(f) + c_{-k}(f)) = \frac{a}{2\pi} + \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\pi k}\sin(\frac{ka}{2})(2\cos(\frac{ka}{2}))$$

$$= \frac{a}{2\pi} + \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{\sin(ka)}{\pi k}\ ,$$

   car $2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$. Donc $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(ka)}{k} = \frac{\pi}{2} - \frac{a}{2} = \frac{\pi-a}{2}$ (pour $0 < a \leq \pi$).
3. La fonction f est bornée donc de carré intégrable et l'identité de Bessel-Parseval s'applique : $\sum_{n\in\mathbf{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\, dt = \frac{a}{2\pi}$. Ainsi :

$$\frac{a}{2\pi} = \frac{a^2}{4\pi^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 n^2}\sin^2(\frac{na}{2}) = \frac{a^2}{4\pi^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(na)}{\pi^2 n^2}\ ,$$

   car $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$. En multipliant par π^2 cela donne finalement :

$$\frac{a\pi}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{a(2\pi - a)}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(na)}{n^2}$$

On a pu séparer les deux sommes infinies car elles sont chacune convergente. La formule vaut clairement pour $a = 0$ aussi. Et si $\pi \leq a \leq 2\pi$ on l'applique à $b = 2\pi - a$, comme $b(2\pi - b) = a(2\pi - a)$ et $\cos(nb) = \cos(na)$ on trouve qu'elle vaut aussi pour ces a.

4. Comme $\left|\frac{\cos(na)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ la série avec les cosinus est normalement donc uniformément convergente. On sait qu'alors l'intégrale de la somme sur un intervalle fini est la somme des intégrales. Or pour tout n entier ≥ 1 on a $\int_0^\pi \cos(na)\,da = 0$. Donc $\pi \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \int_0^\pi \frac{a(2\pi-a)}{4}\,da$. On fait le changement de variable $a = \pi t$:
$$\int_0^\pi \frac{a(2\pi - a)}{4}\,da = \frac{1}{4}\int_0^1 \pi^3\, t(2-t)\,dt = \frac{1}{4}\pi^3[t^2 - \frac{1}{3}t^3]_0^1 = \frac{1}{4}\pi^3(1 - \frac{1}{3}) = \frac{1}{6}\pi^3$$
Finalement $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{6}\pi^3 = \frac{\pi^2}{6}$.

5. On revient à l'égalité établie précédemment, en tenant compte de la valeur de $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$, donc, pour $0 \leq a \leq 2\pi$:
$$\frac{a(2\pi - a)}{4} = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^\infty \frac{\cos(na)}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^\infty \frac{e^{ina}}{2n^2} - \sum_{n=1}^\infty \frac{e^{-ina}}{2n^2}$$
Le même argument de convergence normale employé dans la question précédente nous garantit que cette série est bien la représentation de la fonction de gauche en série de Fourier, c'est-à-dire que $c_0(g) = \frac{\pi^2}{6}$, $c_n(g) = -\frac{1}{2n^2}$ pour $1 \leq n$ et $c_n(g) = -\frac{1}{2n^2}$ pour $n \leq -1$, avec g la fonction 2π-périodique qui vaut $\frac{a(2\pi-a)}{4}$ sur $[0, 2\pi]$. On applique à cette fonction l'identité de Bessel-Parseval, ce qui donne
$$\frac{\pi^4}{36} + 2\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{4n^4} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a^2(2\pi - a)^2}{16}\,da = \frac{1}{32\pi}(2\pi)^5 \int_0^1 t^2(1-t)^2\,dt$$
$$= \pi^4\,[\frac{1}{3}t^3 - 2\frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{5}t^5]_0^1 = \pi^4(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}) = \pi^4(-\frac{1}{6} + \frac{1}{5}) = \frac{\pi^4}{30}$$
Donc $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4} = 2\pi^4(\frac{1}{30} - \frac{1}{36}) = \pi^4\frac{2\cdot 6}{30\cdot 36} = \frac{\pi^4}{90}$.

(7 pts) **C.**

1. Rappelez la formule donnant $c_n(f * g)$ lorsque les coefficients de Fourier de f et de g sont connus.
2. On pose pour $N \in \mathbf{N}$, $N \geq 1$:
$$K_N(x) = 1 + \sum_{1\leq k\leq N} \left(1 - \frac{k}{N}\right)^2 2\cos(kx)$$
En utilisant la question précédente trouver une autre expression de K_N et prouver alors $\forall x \in \mathbf{R} \quad K_N(x) \geq 0$.
3. Soit $\delta > 0$, $\delta \leq \frac{1}{2}\pi$. On rappelle que $F_N(t) \leq \frac{1}{N\sin^2(\frac{1}{2}\delta)}$ lorsque $\delta \leq t \leq 2\pi - \delta$. Montrer :
$$\forall t \in [0, 2\pi]\ \forall x \in [2\delta, 2\pi - 2\delta] \qquad F_N(t)F_N(x-t) \leq \frac{1}{N\sin^2(\frac{1}{2}\delta)}(F_N(t) + F_N(x-t))$$

4. En déduire $2\delta \leq x \leq 2\pi - 2\delta \implies 0 \leq K_N(x) \leq \dfrac{2}{N\sin^2(\frac{1}{2}\delta)}$.
5. Prouver alors que $(K_N)_{N\geq 1}$ est une approximation de l'identité.
6. Question bonus : montrer $0 < K_N(x) < N$ pour tout x et $N \geq 2$.

Corrigé :

1. La formule est $c_n(f * g) = c_n(f)c_n(g)$.
2. Le polynôme trigonométrique K_N s'écrit $1 + \sum_{1\leq k\leq N} \left(1 - \frac{k}{N}\right)^2 (e^{ikx} + e^{-ikx})$ et, par l'expression $F_N(x) = 1+\sum_{1\leq k\leq N} \left(1 - \frac{k}{N}\right) (e^{ikx}+e^{-ikx})$, a donc les mêmes coefficients de Fourier que $F_N * F_N$. C'est donc que $K_N = F_N * F_N$. C'est-à-dire :
$$\forall x \quad K_N(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_N(t)F_N(x-t)\,dt$$
Comme la fonction intégrée est à valeurs positives, on a $K_N(x) \geq 0$.
3. On discute séparément $0 \leq t \leq \delta$, $\delta \leq t \leq 2\pi - \delta$ et $2\pi - \delta \leq t \leq 2\pi$, toujours avec $2\delta \leq x \leq 2\pi - 2\delta$. Si $\delta \leq t \leq 2\pi - \delta$ alors $F_N(t) \leq \frac{1}{N\sin^2(\frac{1}{2}\delta)}$ et comme $F_N(x-t) \geq 0$ on a
$$F_N(t)F_N(x-t) \leq \frac{1}{N\sin^2(\frac{1}{2}\delta)}F_N(x-t)$$
et a fortiori l'inégalité de l'énoncé puisque $F_N(t) \geq 0$. Si $0 \leq t \leq \delta$ alors $\delta \leq x - t \leq 2\pi - 2\delta$, donc $F_N(x-t) \leq \frac{1}{N\sin^2(\frac{1}{2}\delta)}$ et comme $F_N(t) \geq 0$ on peut multiplier d'où $F_N(t)F_N(x-t) \leq \frac{1}{N\sin^2(\frac{1}{2}\delta)}F_N(t)$ et a fortiori l'inégalité de l'énoncé. Enfin si $2\pi - \delta \leq t \leq 2\pi$ et $2\delta \leq x \leq 2\pi - 2\delta$ alors $\delta \leq t - x \leq 2\pi - 2\delta$ donc $F_N(x-t) = F_N(t-x) \leq \frac{1}{N\sin^2(\frac{1}{2}\delta)}$ et on conclut comme précédemment.
4. On intègre l'inégalité de la question précédente par rapport à t sur l'intervalle 2π. Cela donne
$$2\pi K_N(x) \leq \frac{1}{N\sin^2(\frac{1}{2}\delta)}\left(\int_0^{2\pi} F_N(t)\,dt + \int_0^{2\pi} F_N(x-t)\,dt\right)$$
On est habitué au fait que $\int_0^{2\pi} F_N(x-t)\,dt = \int_0^{2\pi} F_N(-t)\,dt = \int_0^{2\pi} F_N(t)\,dt\ (= 2\pi)$ donc $2\pi K_N(x) \leq \frac{1}{N\sin^2(\frac{1}{2}\delta)}4\pi$ et $K_N(x) \leq 2\frac{1}{N\sin^2(\frac{1}{2}\delta)}$ pour $2\delta \leq x \leq 2\pi - 2\delta$. Et on sait déjà $K_N(x) \geq 0$.
5. La fonction K_N est paire. Soit $0 < \delta' \leq \pi$ et $\delta = \frac{1}{2}\delta'$. Pour tout $\epsilon > 0$ et $N \geq \frac{2}{\sin^2(\frac{1}{2}\delta)}\epsilon^{-1}$ on a par ce qui précède $0 \leq K_N(x) \leq \epsilon$ sur $[-\pi, +\pi]\setminus]-\delta', \delta'[$. Donc (K_N) converge uniformément vers zéro sur ces intervalles. De plus $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)\,dt = 1$ en intégrant terme à terme. Et finalement $|K_N(t)| = K_N(t)$ car $K_N \geq 0$. Donc les trois conditions pour une approximation de l'identité sont satisfaites.
6. On a en fait $K_N(x) > 0$ car on intègre sur un intervalle non singleton une fonction continue positive ou nulle mais pas identiquement nulle ($t \mapsto F_N(t)F_N(x-t)$ n'a qu'un nombre fini de zéros sur $[0, 2\pi]$). Il est clair que $K_N(x) \leq 1 + \sum_{1\leq k\leq N} \left(1 - \frac{k}{N}\right)^2 2$. Pour $N \geq 2$ ceci est $< 1 + \sum_{1\leq k\leq N} \left(1 - \frac{k}{N}\right) 2 = F_N(0) = N$. Donc $K_N(x) < N$. Remarque : on peut calculer la majoration optimale $1 + \sum_{1\leq k\leq N} \left(1 - \frac{k}{N}\right)^2 2$, elle vaut $\frac{2}{3}N + \frac{1}{3}\frac{1}{N}$. Et on peut prouver que la valeur minimale de $K_N(x)$ est $\frac{1}{N}$.