Exercices en surplus :

XCVIII Les gramiens définis dans les exercices précédents pour des vecteurs dans un espace hermitien existent aussi avec les mêmes formules pour des vecteurs dans un espace euclidien, en particulier dans $\mathbf{R}^N$ muni de sa structure euclidienne canonique. Soient v_1, ..., v_N, des vecteurs dans $\mathbf{R}^N$. Montrer que le volume du parallélotope $t_1v_1 + \cdots + t_Nv_N$, $0 \le t_1 \le 1$, ..., $0 \le t_N \le 1$ est la racine carrée du gramien des vecteurs v_1, ..., v_N. Le volume est calculé par rapport à la mesure de Lebesgue canonique, qui donne masse 1 à l'hypercube unité.

XCIX (Inégalité de Hadamard) Montrer $g(v_1, \ldots, v_n) \le (v_1, v_1) \ldots (v_n, v_n)$ avec égalité si et seulement si soit les vecteurs v_j sont mutuellement perpendiculaires soit l'un d'entre eux est le vecteur nul. Soit $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ une matrice carrée complexe ou réelle quelconque. Interpréter A^*A comme une matrice de Gram[23] et en déduire l'inégalité de Hadamard :

$$|\det(A)| \le \prod_{1\le j\le n} \sqrt{\sum_{1\le i\le n} |a_{ij}|^2}$$

C (séparabilité) On se donne un espace de Hilbert V. Si V est de dimension finie alors il a une base orthonormée (finie). On suppose V de dimension infinie. On suppose que l'on peut trouver des vecteurs u_0, u_1, ...qui ont la propriété que la suite $(u_n)_{n=0,1,\ldots}$ est partout dense dans V : tout vecteur est limite d'une suite extraite. Montrer que le seul vecteur perpendiculaire à tous les u_n est le vecteur nul. On pose $H_0 = \{0\}$ et l'on note H_n l'espace vectoriel engendré par u_0, ..., u_{n-1}. Montrer qu'il y a une infinité de $n \ge 1$ tel que $\dim H_n = 1 + \dim H_{n-1}$. On les note $1 \le n_1 < n_2 < \ldots$. Enfin on choisit e_k de norme 1 dans H_{n_k} perpendiculaire à H_{n_k-1}. Montrer que chaque u_n est combinaison linéaire finie des e_k, $k \ge 1$. En déduire que les e_k, $k \ge 1$ forment un système complet, et aussi orthonormé, dans V. En déduire que (e_k) est une base orthonormée dénombrable de V. Réciproquement si V possède une base orthonormée dénombrable montrer que l'on peut former une suite de vecteurs partout dense. On dit que l'espace de Hilbert est séparable. La séparabilité est donc la condition nécessaire est suffisante pour l'existence d'une base orthonormée dénombrable[24]. En utilisant la notion de séparabilité, prouver que si V possède une base orthonormée dénombrable alors tout sous espace fermé de V possède aussi une base orthonormée dénombrable.

CI (deuxième formule de la moyenne) La deuxième formule de la moyenne est aux fonctions ce que la sommation d'Abel-Dirichlet (exercice L) est aux séries. Soit ϕ décroissante positive sur $[x, y]$, soit f intégrable sur cet intervalle, alors :

$$\left|\int_x^y \phi(t)f(t)dt\right| \le \phi(x) \sup_{x\le t\le y} \left|\int_x^t f(u)du\right| \qquad (\phi \text{ décroissante positive})$$

Remarquez bien que les valeurs absolues sont à l'extérieur des intégrales. Faites la preuve :

1. pour ϕ de classe C^1 et f continue, par une intégration par parties,

23. prendre comme vecteurs les conjugués complexes des colonnes de A
24. finie ou infinie : notre convention est que les ensembles finis sont dénombrables.

2. en toute généralité en admettant qu'après avoir modifié $\phi(t)$ en au plus un nombre dénombrable de points pour qu'elle soit continue à droite [25] on peut écrire $\phi(t) = \int_{]t,y]} d\mu(u) + \phi(y)$ avec μ une mesure positive et en utilisant Fubini.

Pour encore une autre méthode de preuve, voir le texte Théorème de Dirichlet sur le site de votre Professeur. Lorsque f est à valeurs **réelles** justifier alors :

$$\exists \xi \in]x,y[\quad \int_x^y \phi(t) f(t) dt = \phi(x^+) \int_x^\xi f(t)dt + \phi(y^-) \int_\xi^y f(t)dt$$

valable pour toute ϕ monotone (pas seulement décroissante positive).

CII En appliquant la deuxième formule de la moyenne à la fonction $\sin(x/2)^{-1}$ qui est monotone sur l'intervalle d'extrémités a et π $(0 < a < 2\pi)$, prouver $\left|\int_a^\pi D_N(t) \frac{dt}{2\pi}\right| \le \frac{1}{\pi(N+\frac{1}{2})\sin(\frac{a}{2})}$, et en déduire pour $0 < a < b < 2\pi$:$\left|\int_a^b D_N(t) \frac{dt}{2\pi}\right| \le \frac{1}{(N+\frac{1}{2})\pi}\left(\frac{1}{\sin(\frac{a}{2})} + \frac{1}{\sin(\frac{b}{2})}\right)$. Montrer plus généralement $|(D_N * \mathbf{1}_{]a,b[})(x)| \le \frac{1}{(N+\frac{1}{2})\pi}\left(\frac{1}{\sin(\frac{a-x}{2})} + \frac{1}{\sin(\frac{b-x}{2})}\right)$ pour $b - 2\pi < x < a$. En déduire que si ϕ est une fonction en escalier, identiquement nulle sur $]u,v[$ (avec $u < 0 < v$) alors la série de Fourier $D_n * \phi$ converge uniformément vers zéro sur tout sous-intervalle $[u', v'] \subset]u,v[$ fermé. En déduire que si f et g sont deux fonctions intégrables qui coïncident sur $]u,v[$ la différence $S_N(f) - S_N(g)$ converge uniformément vers 0 sur tout sous-intervalle $[u', v'] \subset]u,v[$ fermé.

CIII On revient au problème de borner uniformément les $s_n(x) = \sum_{1 \le k \le n} \frac{\sin(kx)}{k}$. On peut supposer $0 < x \le \pi$ (pourquoi ?). On pose $u_k(x) = \sin(kx)$, $v_k = \frac{1}{k}$, pour $k \ge 1$ (et $u_0(x) = 0$). On note $A_n(x) = u_1(x) + \cdots + u_n(x)$. Montrer $|A_n(x)| \le \sin(x/2)^{-1}$ et même $|A_n(x) - A_m(x)| \le \sin(x/2)^{-1}$ pour tout n, m. En déduire (par sommation d'Abel) $\left|\sum_{k=n+1}^\infty \frac{\sin(kx)}{k}\right| \le \frac{1}{\sin(x/2)} \frac{1}{n+1}$. Montrer alors :

$$nx \ge \pi \implies |s_n(x)| \le \frac{\pi - x}{2} + \frac{x}{\pi \sin(x/2)} < \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \quad (= 2.2074\dots)$$

Pour $0 < nx < \pi$ prouver en utilisant une somme de Riemann (on observera que la fonction $\frac{\sin(x)}{x}$ est strictement décroissante sur $]0,\pi]$) : $0 < s_n(x) < \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t} dt \quad (= 1.8519\dots)$. En déduire

$$\forall x \in \mathbf{R}\ \forall n \ge 1 \qquad \left|\sum_{1 \le k \le n} \frac{\sin(kx)}{k}\right| < \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}$$

En fait, c'est bien $\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t} dt$ qui est la borne optimale. Se reporter à l'annexe Gibbs sur le site de votre Professeur.

CIV (un théorème de Cantor) Il semble que Riemann connaissait le résultat suivant mais qu'il n'en ait pas donné explicitement la preuve : *si pour tout* x *il est vrai que* $\lim_{n\to\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = 0)$ *alors* $\lim\ a_n = 0$ *et* $\lim\ b_n = 0$. Ce n'est pas un résultat évident, lorsque vous y aurez suffisamment réfléchi reportez vous au texte Cantor-Lebesgue sur le site de votre Professeur.

25. autrement dit on remplace $\phi(t)$ par $\phi(t^+)$.