LXXXI (formes sesquilinéaires) On considère un espace vectoriel complexe V et une forme sesquilinéaire $B(v, w)$ (c'est-à-dire linéaire en v, conjuguée linéaire en w). Rappels du cours : donner la formule qui donne $B(v, w)$ à partir de $B(v + w, v + w)$, $B(v - w, v - w)$, $B(v + iw, v + iw)$, $B(v - iw, v - iw)$, en déduire que si B et C sont deux formes sesquilinéaires telles que $\forall v\ B(v, v) = C(v, v)$ alors $B = C$; montrer que les conditions $\forall v\ B(v, v) \in \mathbf{R}$ et $\forall v \forall w\ B(w, v) = \overline{B(v, w)}$ sont équivalentes (une forme sesquilinéaire B est dite hermitienne si elle vérifie l'une de ces deux conditions). On suppose que l'on a maintenant un espace vectoriel **réel** et deux formes bilinéaires B et C. Montrer qu'il n'est pas vrai que $\forall v\ B(v, v) = C(v, v) \implies B = C$. Par contre montrer que c'est vrai si B et C sont deux formes bilinéaires symétriques (B est dite symétrique si $\forall v \forall w\ B(v, w) = B(w, v)$).

LXXXII (isométries) Une isométrie $\phi : V \to W$ est une application linéaire d'un espace hermitien vers un autre telle que $\forall v_1, v_2 \in V \quad (\phi(v_1), \phi(v_2))_W = (v_1, v_2)_V$. Montrer que l'application linéaire ϕ est une isométrie dès que $\forall v \in V \quad \|\phi(v)\|_W = \|v\|_V$. Montrer qu'une isométrie est toujours injective. Un opérateur linéaire $\phi : V \to V$ isométrique **et surjectif** d'un espace hermitien sur lui-même est aussi dit **unitaire**. On suppose V de dimension finie. Montrer que toute isométrie $\phi : V \to V$ est unitaire. Donner un exemple d'isométrie non unitaire d'un espace hermitien (de dimension infinie) V vers lui-même. On dit que deux espaces sont isométriques si il existe une isométrie bijective de l'un vers l'autre (la bijection réciproque est alors aussi isométrique). Montrer que les espaces $l^2(\mathbf{N})$, $l^2(\mathbf{Z})$, $l^2(\mathbf{Q})$ sont mutuellement isométriques.

LXXXIII (opérateurs unitaires en dimension finie) Soit V un espace hermitien de dimension finie. On le munit d'une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_N)$. Montrer que les isométries de V sont les applications linéaires ϕ dont les matrices $M(\phi)$ dans cette base vérifient la condition $M(\phi)^* \cdot M(\phi) = I_N$. Les matrices U telles que $U^* \cdot U = I_N$ sont dites unitaires. Montrer que les matrices unitaires forment un groupe pour la multiplication des matrices. On revient à l'espace V de dimension finie avec une isométrie $\phi : V \to V$. Soit v_1 un vecteur propre (que l'on prendra de norme $\|v_1\| = 1$) pour une valeur propre λ_1 (montrer $|\lambda_1| = 1$)[20]. Montrer que le sous-espace $W = \{v_1\}^\perp = \{w : (w, v_1) = 0\}$ est invariant par ϕ. En déduire qu'il existe une base orthonormée $(v_1, \ldots, v_N)$ de V formée de vecteurs propres pour ϕ. Montrer que toute matrice unitaire est diagonalisable dans une base orthonormée, et qu'une matrice qui se diagonalise dans une base orthonormée est unitaire si et seulement si ses valeurs propres sont de module 1.

LXXXIV (Bessel-Parseval en général) Soit V un espace hermitien et e_n, $0 \leq n < N$ (éventuellement $N = \infty$) des vecteurs orthonormés. Prouver l'inégalité de Bessel générale :

$$\forall u \in V \qquad \sum_{0 \leq n < N} |(u, e_n)|^2 \leq \|u\|^2$$

Pour la preuve, interpréter les sommes partielles finies comme des normes au carré de projections orthogonales de u sur des espaces bien choisis. Dans l'inégalité de Bessel pour u on suppose que l'on a égalité. Supposons d'abord que N est fini. Que vaut $\|u - (u, e_0)e_0 - \cdots - (u, e_{N-1})e_{N-1}\|^2$? en déduire $u = \sum_{0 \leq n < N} (u, e_n)e_n$. On suppose maintenant $N = \infty$. Montrer $u = \lim_{M \to \infty} \sum_{0 \leq n \leq M} (u, e_n)e_n$. En déduire que dans tous les cas l'égalité dans l'inégalité de Bessel implique l'appartenance de u au plus petit sous espace vectoriel fermé contenant les e_n

20. en dimension finie tout endomorphisme d'un espace vectoriel (complexe !) a un vecteur propre. . .

(l'adhérence des combinaisons linéaires finies des e_n). Réciproquement prouver que si u est dans cet espace alors il y a égalité dans l'inégalité de Bessel. On suppose finalement que l'inégalité de Bessel est en fait une égalité pour tout $u \in V$. Montrer que cela équivaut à dire que les combinaisons linéaires finies des e_n sont denses dans V : on dit que les e_n forment un « système complet » (une terminologie assez malheureuse à cause des emplois multiples du mot complet).

LXXXV (suite) Maintenant on suppose que V est un espace de Hilbert. On se donne un système orthonormé e_n, $0 \leq n < N$, donc avec N vecteurs (éventuellement une infinité dénombrable). Soit $u \in V$ montrer que $\lim_{M\to\infty} \sum_{0\leq n\leq M}(u, e_n)e_n$ existe (par exemple en vérifiant que c'est une suite de Cauchy). On note cette limite $P(u)$. Montrer que P est un opérateur linéaire. Montrer $\forall n\ (u - P(u), e_n) = 0$ et en déduire $(u - P(u), P(u)) = 0$ et :

$$\|u\|^2 = \|u - P(u)\|^2 + \|P(u)\|^2$$

LXXXVI (suite) Soit H l'adhérence dans V des combinaisons linéaires finies des e_n. Montrer que $P(u)$ est la projection orthogonale de u sur H. Soit $A = \{j \in \mathbf{N}, j < N\}$, et soit v_j l'élément de $l^2(A)$ défini par $v_j(k) = \delta_{j,k}$. Montrer qu'il existe une unique application linéaire Φ de $l^2(A)$ vers H qui à v_j associe $e_j \in V$ pour tout j. Montrer que Φ est une bijection isométrique (autrement dit $(e_0, e_1, \dots)$ est une base orthonormée de H au sens de la définition du cours). En déduire que H est lui-aussi un espace de Hilbert.

LXXXVII (suite) Dans les exercices précédents on a prouvé que si $(e_n)_{0\leq n<N}$ est un système orthonormé dans un Hilbert V, alors c'est une base orthonormée de l'adhérence H des combinaisons linéaires finies des e_n. De plus on a prouvé l'existence d'une projection orthogonale P sur H. On suppose que les e_n ont la propriété qu'aucun vecteur non nul ne leur soit à tous perpendiculaires. En appliquant cela à $u - P(u)$ montrer qu'alors en fait $H = V$. En déduire que pour un système orthonormé $(e_n)_{0\leq n<N}$ dans un Hilbert V il y a équivalence entre :

1. le système est une base orthonormée de V,
2. le système est complet dans V,
3. le système a la propriété qu'aucun vecteur de V non nul ne lui est perpendiculaire.

LXXXVIII Soit V un espace de Hilbert et H un sous espace. Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1. H est fermé dans V,
2. H en tant qu'espace hermitien H est un espace de Hilbert.

LXXXIX (double perpendiculaire) Soit H un sous espace fermé de l'espace de Hilbert V. On note $H^\perp$ l'espace des vecteurs perpendiculaires à H. Montrer que $H^\perp$ est un sous-espace fermé de V. Montrer que tout vecteur u s'écrit de manière unique sous la forme $u_1 + u_2$ avec $u_1 \in H$ et $u_2 \in H^\perp$. Que vaut le produit scalaire (u, u_2) ? en déduire que si $u \perp H^\perp$ alors $u \in H$. En déduire l'identité $H = (H^\perp)^\perp$.

XC (suite) Soit H un sous espace vectoriel quelconque de l'espace de Hilbert V. Montrer que son double perpendiculaire $(H^\perp)^\perp$ coïncide avec son adhérence topologique $\overline{H}$.

XCI (projection orthogonale en dimension quelconque) Soit V un espace hermitien et $W \subset V$ un sous-espace vectoriel. On suppose que W est, pour le produit scalaire induit de V, un espace de Hilbert. Montrer que pour tout $v \in V$ il existe un unique vecteur $w \in W$

minimisant $\|v-w\|$, et que cela équivaut à $v-w \perp W$. Ind. : prendre une suite $(w_j)_{j\geq 1}$ minimisante et utiliser

$$\|w_j-w_k\|^2+4\|\frac{w_j+w_k}{2}-v\|^2=2\|w_j-v\|^2+2\|w_k-v\|^2$$

XCII (Gram-Schmidt) Soit v_1, v_2, etc...des vecteurs dans un espace hermitien, en nombre fini ou infini. On pose $H_0=\{0\}$ et pour $n\geq 1$, on note H_n l'espace vectoriel engendré par v_1, ..., v_n, qui est de dimension au plus n ; puis l'on note P_n la projection orthogonale sur H_n et finalement on note $w_n=v_n-P_{n-1}(v_n)$. Montrer que w_n est perpendiculaire à H_{n-1}, que les w_n forment un système orthogonal, et (par récurrence) que H_n est engendré par w_1, ..., w_n. Le passage des v_j aux w_j s'appelle « orthogonalisation de Gram-Schmidt ». On suppose maintenant que les v_j sont linéairement indépendants (c'est-à-dire les combinaisons linéaires finies des v_j ne peuvent donner le vecteur nul que si tous les coefficients sont nuls). Montrer que les w_j sont alors eux aussi linéairement indépendants. Montrer que les formules correspondant à l'algorithme de Gram-Schmidt sont alors les suivantes :

$$\begin{aligned}
&w_1=v_1 && (w_1,w_1)=(v_1,v_1)\\
&w_2=v_2-\frac{(v_2,w_1)}{(w_1,w_1)}w_1 && (w_2,w_2)=(v_2,w_2)=(v_2,v_2)-\frac{|(v_2,w_1)|^2}{(w_1,w_1)}\\
&w_3=v_3-\frac{(v_3,w_1)}{(w_1,w_1)}w_1-\frac{(v_3,w_2)}{(w_2,w_2)}w_2 && (w_3,w_3)=(v_3,w_3)=(v_3,v_3)-\frac{|(v_3,w_1)|^2}{(w_1,w_1)}-\frac{|(v_3,w_2)|^2}{(w_2,w_2)}\\
&\cdots\ \cdots && \cdots\ \cdots\\
&w_n=v_n-\sum_{1\leq j<n}\frac{(v_n,w_j)}{(w_j,w_j)}w_j && (w_n,w_n)=(v_n,w_n)=(v_n,v_n)-\sum_{1\leq j<n}\frac{|(v_n,w_j)|^2}{(w_j,w_j)}
\end{aligned}$$

Pourquoi a-t-on $(w_n,w_n)=(v_n,w_n)$? On notera aussi que parfois à chaque étape on normalise w_n en $w_n'=\frac{w_n}{\|w_n\|}$ ce qui simplifie ensuite la formule pour w_{n+1}, puisque $(w_1',\ldots,w_n')$ est une base orthonormée de H_n. Cependant cela oblige à calculer la racine carrée $\|w_n\|$ de (w_n,w_n). Dans les exercices qui viennent on va donner une autre formule pour (w_n,w_n), directement en fonction des v_j, $1\leq j\leq n$.

XCIII (encore Cauchy-Schwarz) Soient u et v deux vecteurs dans un espace hermitien V. Soit A la matrice $\left(\begin{smallmatrix}(u,u) & (u,v)\\ (v,u) & (v,v)\end{smallmatrix}\right)$. Montrer que la matrice A est hermitienne : $A=A^*$, où de manière générale pour toute matrice M, rectangulaire ou carrée, on note M^* son conjugué hermitien, c'est-à-dire la matrice transposée dans laquelle on a en plus pris le conjugué complexe de toutes les entrées : $M^*_{ij}=\overline{M_{ji}}$. Vérifier $(MN)^*=N^*M^*$. Bien sûr l'identité $M=M^*$ n'est possible que pour les matrices carrées. Montrer que si M est une matrice hermitienne carrée alors $\det(M)\in\mathbf{R}$. Revenons à notre matrice $\left(\begin{smallmatrix}(u,u) & (u,v)\\ (v,u) & (v,v)\end{smallmatrix}\right)$. Montrer que l'inégalité de Cauchy-Schwarz équivaut à $\det(A)\geq 0$.

XCIV (Matrice et déterminant de Gram) L'exercice précédent suggère d'associer à tout système de n vecteurs v_j, $1\leq j\leq n$ la matrice carrée $A=((v_i,v_j))_{1\leq i,j\leq n}$. Montrer que cette matrice est une matrice hermitienne. On l'appelle « Matrice de Gram » des vecteurs v_1, ..., v_n, et je la note parfois $G(v_1,\ldots,v_n)$.[21] Son déterminant s'appelle « Gramien », et on le notera $g(v_1,\ldots,v_n)$. Il s'agit d'un nombre réel puisque la matrice de Gram est hermitienne. En fait il est même positif ou nul, comme nous allons le montrer maintenant, et ce fait est donc, par l'exercice précédent, une généralisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Supposons que l'on définisse, pour $1\leq k\leq m$, des vecteurs $w_k=\sum_{1\leq j\leq n}P_{kj}v_j$. Soit P la matrice rectangulaire avec m lignes et n colonnes, $P=(P_{kj})_{1\leq k\leq m,1\leq j\leq n}$. Montrer la formule matricielle :

$$G(w_1,\ldots,w_m)=P\cdot G(v_1,\ldots,v_n)\cdot P^*$$

et donc si $m=n$, c'est-à-dire dans le cas où P est une matrice carrée :

$$g(w_1,\ldots,w_n)=|\det(P)|^2 g(v_1,\ldots,v_n)$$

21. certains auteurs prennent comme définition de la matrice de Gram $((v_j,v_i))_{1\leq i,j\leq n}$ qui est la transposée de notre A, et est aussi $\overline{A}$. Le déterminant est le même.

On suppose maintenant que les v_j sont linéairement indépendants et que w_1, …, w_n sont obtenus par le procédé de Gram-Schmidt. Montrer que dans ce cas la matrice P est triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale. En déduire la formule remarquable :

$$g(v_1,\dots,v_n) = (w_1,w_1)(w_2,w_2)\dots(w_n,w_n)$$

qui prouve $g(v_1,\dots,v_n) > 0$ et qui montre aussi que dans l'algorithme de Gram-Schmidt on a $(w_j,w_j) = \frac{g_j}{g_{j-1}}$ avec $g_j = g(v_1,\dots,v_j)$, et $g_0 = 1$.[22] Enfin, dans le cas où les v_j ne sont pas linéairement indépendants, montrer que leur gramien est nul, en montrant que l'une des colonnes (ou lignes) de la matrice de Gram est combinaison linéaire des autres. En déduire pour conclure que le gramien est toujours positif ou nul et qu'il est strictement positif si et seulement si les vecteurs sont linéairement indépendants.

XCV (Système dual) On suppose que les vecteurs v_1, …, v_n sont linéairement indépendants, et soit H l'espace qu'ils engendrent. Montrer qu'il existe dans H pour chaque j un unique vecteur ξ_j tel que $(\xi_j,v_k) = 0$ pour $k \neq j$, $(\xi_j,v_j) = 1$ (par exemple, ramener le problème à la résolution d'un système linéaire ; ou encore, obtenir ξ_j par la formule $\frac{v'_j}{(v'_j,v_j)}$ avec $v'_j = v_j - Q_j(v_j)$, et Q_j la projection orthogonale sur l'espace engendré par les v_k, $k \neq j$; justifier $(v'_j,v_j) = (v'_j,v'_j) \neq 0$). Montrer que la projection orthogonale sur H est donnée par les deux formules :

$$P(v) = \sum_{1\leq j\leq n}(v,v_j)\xi_j = \sum_{1\leq j\leq n}(v,\xi_j)v_j$$

Montrer que $G(\xi_1,\dots,\xi_n)$ et $G(v_1,\dots,v_n)$ sont inverses l'une de l'autre.

XCVI Dans l'espace de Hilbert $V = L^2(0,2\pi;\frac{dx}{2\pi})$ on considère le sous-espace vectoriel $H = \{f \in V \mid n < 0 \implies (f,e_n) = 0\}$. Comme d'habitude on a noté $e_n(x) = e^{inx}$.

1. Montrer que H est un sous-espace vectoriel fermé et prouver que $(e_n)_{n=0,1,\dots}$ en est une base orthonormée.
2. Déterminer les projections orthogonales des fonctions $f(x) = (2-e^{ix})^{-1}$ et $g(x) = (1-2e^{ix})^{-1}$ sur H.
3. Pour $z \in \mathbf{C}, |z| < 1$ on considère $\Phi_z : V \to \mathbf{C}$, $\Phi_z(f) = \sum_{n=0}^{\infty}(f,e_n)z^n$. Trouver l'unique $f_z \in V$ avec $\forall f \in V$ $\Phi_z(f) = (f,f_z)$ et déterminer (f_z,f_w) pour tout z, w dans $\mathbf{C}$ tels que $|z| < 1$, $|w| < 1$.
4. Prouver que $H^\perp$ est l'intersection des noyaux des Φ_z, $z \in \mathbf{C}$, $|z| < 1$.

XCVII Soit $H \subset V = L^2(0,2\pi;\frac{dx}{2\pi})$ un sous espace vectoriel fermé. On suppose de plus que pour tout $g \in H$ les fonctions $e^{ix}g(x)$ et $e^{-ix}g(x)$ sont aussi dans H, autrement dit que $Q(x)g(x)$ est aussi dans H pour tout polynôme trigonométrique Q. On notera P la projection orthogonale sur H.

1. Soit maintenant $f \in H$ la projection orthogonale $P(1)$ sur H de la fonction constante 1. Montrer que $1-f$ est perpendiculaire à $e^{inx}f(x)$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$.
2. Justifier que la fonction $(1-f(x))\overline{f(x)}$ est dans L^1 et a tous ses coefficients de Fourier nuls.
3. Montrer qu'il existe une partie mesurable A telle que $f(x) = \mathbf{1}_A(x)$ c'est-à-dire (au sens du presque partout) $f(x) = 1$ pour $x \in A$, $f(x) = 0$ pour $x \notin A$.
4. Cette question est un peu plus difficile à traiter avec tous les détails : prouver que H est le sous-espace de V des (classes de) fonctions qui s'annulent (presque partout) sur le complémentaire de A. Et, pour conclure, on établira réciproquement que tout sous espace vectoriel ainsi défini est fermé dans V et est stable par multiplication par $e^{\pm ix}$.

22. cette belle formule théorique se heurte au calcul pratique des déterminants ; évidemment dans la pratique c'est justement au contraire pour calculer de tels déterminants que l'on utilise l'algorithme de Gram-Schmidt…