LX Donner un exemple de fonction qui ne soit pas continue par morceaux. Donner un exemple de fonction non monotone par morceaux. Donner en fait un exemple de fonction ni continue par morceaux ni monotone par morceaux. Donner un exemple de fonction monotone mais non continue par morceaux. À propos montrer qu'une fonction monotone par morceaux a au plus un nombre dénombrable de discontinuités. Donner un exemple de fonction continue qui ne soit pas monotone par morceaux. D'une fonction continue mais non C^1 par morceaux. D'une fonction C^1 par morceaux mais non C^2 par morceaux. D'une fonction continue et C^∞ par morceaux mais non de classe C^∞. . . [16]. . . Donner un exemple d'une fonction mesurable mais non intégrable. D'une fonction intégrable mais non de carré intégrable. D'une fonction de carré intégrable mais non intégrable. D'une fonction continue non bornée. D'une fonction continue non uniformément continue. D'une fonction nulle part continue. Donner un exemple d'une fonction bornée non intégrable au sens de Riemann.

LXI On sait qu'une fonction C^2 a des coefficients de Fourier qui sont $\mathcal{O}(1/|n|^2)$. Cela est-il le cas pour une fonction C^2 par morceaux ? Donner une condition nécessaire et suffisante.

LXII (Théorème d'Abel-Dirichlet) On a déjà abordé cela dans un ancien exercice mais on recommence. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite (réelle ou complexe) telle que les sommes $S_n = \sum_{0\leq k\leq n} u_k$ soient bornées. Soit $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite décroissante tendant vers zéro. Montrer que la série $\sum_{n=0}^\infty u_n v_n$ est convergente. Donner un exemple pour lequel la série n'est pas absolument convergente. On suppose de plus que les u_n dépendent d'un paramètre x. Montrer que si les $S_n(x)$ sont uniformément bornées alors $\sum_{n=0}^\infty u_n(x) v_n$ est uniformément convergente. Donner un exemple pour lequel la série n'est pas normalement convergente. Si on suppose que les v_n dépendent aussi de x, quelle hypothèse supplémentaire suffira pour que $\sum_{n=0}^\infty u_n(x)v_n(x)$ soit garantie uniformément convergente ?

LXIII On pose $T_n(x) = \sum_{1\leq k\leq n} \sin(kx)$. Avec $x_n = \frac{\pi}{n}$, trouver un équivalent de $T_n(x_n)$ lorsque n tend vers l'infini. En déduire que les T_n ne sont pas uniformément bornés sur $[0, 2\pi]$. Donner une formule explicite pour les T_n ; montrer qu'ils sont uniformément bornés sur tout sous-intervalle fermé $[a, b] \subset]0, 2\pi[$.

LXIV (suite) On a rencontré à de multiples reprises la série $\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin(nx)}{n}$. Vérifier à nouveau que c'est la série de Fourier de la fonction impaire 2π-périodique qui vaut $\frac{\pi-x}{2}$ sur $]0, 2\pi[$. Comme il s'agit d'une fonction C^1 par morceaux, on sait que l'on a donc la convergence de la série et $\frac{\pi-x}{2} = \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin(nx)}{n}$ en tout $x \in]0, 2\pi[$ puisque tout tel x est un point de continuité. Confirmer que la série est convergente en invoquant le théorème d'Abel-Dirichlet. La série est-elle uniformément convergente sur $[0, 2\pi]$? Est-elle uniformément convergente sur $[a, b] \subset]0, 2\pi[$?

LXV (suite) Soit $0 < x < \pi$. Montrer $\sum_{n=1}^\infty \frac{|\sin(nx)|}{n} = +\infty$. Indications, montrer que : quitte à remplacer x par $\pi - x$ on peut supposer $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$. Quitte à passer à une sous-série, et à remplacer x par $2^k x$ pour un k approprié on peut se ramener à $\frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{2}$. Alors on ne peut

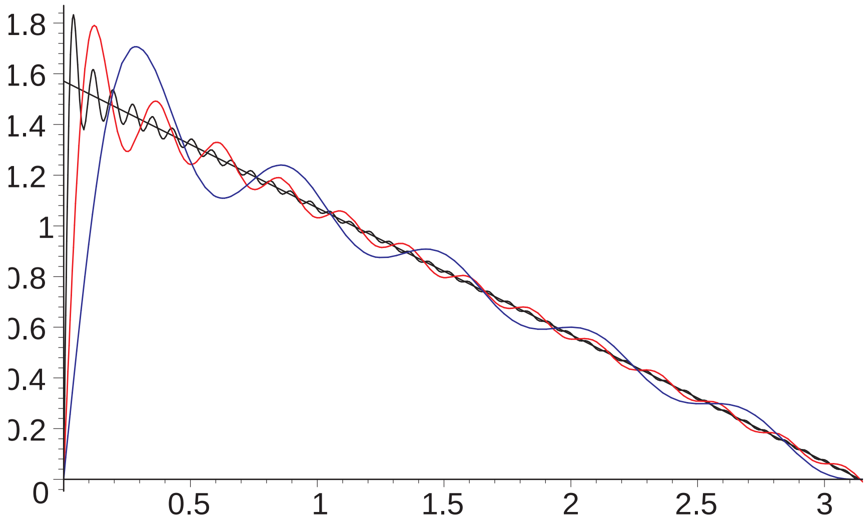
16. Votre travail devrait être justement de vous poser par vous-même ce genre de questions. Vous devez vous poser ces questions et y répondre par vous-même.

pas avoir à la fois $|\sin(3mx)| < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $|\sin((3m+1)x)| < \frac{1}{\sqrt{2}}$, et $|\sin((3m+2)x)| < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Conclure.

LXVI (suite) Relisez le texte qui vous a été distribué sur une approche élémentaire à la série de Fourier des fonctions « triangle ». Extrayez-en des inégalités qui montrent que les sommes partielles de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ sont uniformément bornées sur $\mathbf{R}$.

LXVII (suite) On revient par une autre méthode au problème de borner les $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}$. Soit, pour $n \geq 1$, $U_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (1 - \frac{k}{n}) \frac{\sin(kx)}{k}$. Donner une expression intégrale pour $U_n(x)$ qui utilise les noyaux de Fejér et en déduire $\forall x \forall n\ |U_n(x)| \leq \frac{\pi}{2}$. En déduire : $\forall n \geq 1\ \forall x \in \mathbf{R} \qquad |S_n(x)| \leq 1 + \frac{\pi}{2}$.

FIG. 4 – $\sum_{1 \leq n \leq N} \frac{\sin(nx)}{n}$ sur l'intervalle $[0, \pi]$ pour $N = 10, 25, 80$.



LXVIII (suite) En fait on a aussi les surprenantes inégalités :

$$\forall n \geq 1 \quad 0 < x < \pi \quad \Rightarrow \quad 0 < \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{\sin(kx)}{k}$$

Vous pourrez vous y essayer. Et à propos le maximum $M(n)$ est atteint en $x = \frac{\pi}{n+1}$, croît avec n et tend vers $C = \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$ qui est supérieur d'environ 18% à $\frac{\pi}{2}$. Voir sur la figure.

LXIX On note à nouveau $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}$. En utilisant une sommation d'Abel-Dirichlet appropriée et des résultats précédents montrer que la série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n \log(n)}$ est uniformément convergente sur $[-\pi, \pi]$. En déduire que sa somme $F(x)$ est une fonction continue impaire dont la série de Fourier est $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n \log(n)}$. Constater que pour cette fonction continue F (dont une approximation du graphe est donné dans la figure 5) on a $\sum_{k \in \mathbf{Z}} |c_k(F)| = +\infty$. La fonction F ne peut donc pas être C^1, et en effet on voit une tangente verticale à l'origine.[17]

LXX (suite) Montrer que pour tout $x \neq 0$ (modulo 2π) $F'(x)$ existe et vaut $G(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{\log(n)}$ (vous montrerez $F(x) = -\int_x^{\pi} G(t)\, dt$ pour $0 < x \leq \pi$ en étudiant l'uniformité de la convergence de la série pour G). À propos cette série est intéressante car on peut montrer que

17. D'ailleurs, on peut montrer que l'on a $F(x) \sim \frac{\pi}{2} \frac{1}{\log(1/x)}$ pour $x \to 0^+$. Cela n'utilise aucune mathématique extra-terrestre, en tout cas rien d'inconnu de vous mais il y aurait trop d'indications à donner.

FIG. 5 – $\sum_{2\leq n\leq 500} \frac{\sin(nx)}{n\log(n)}$

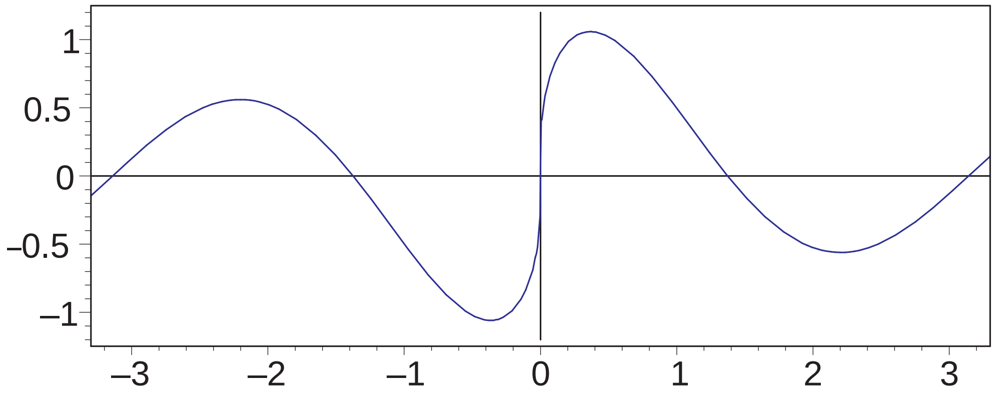
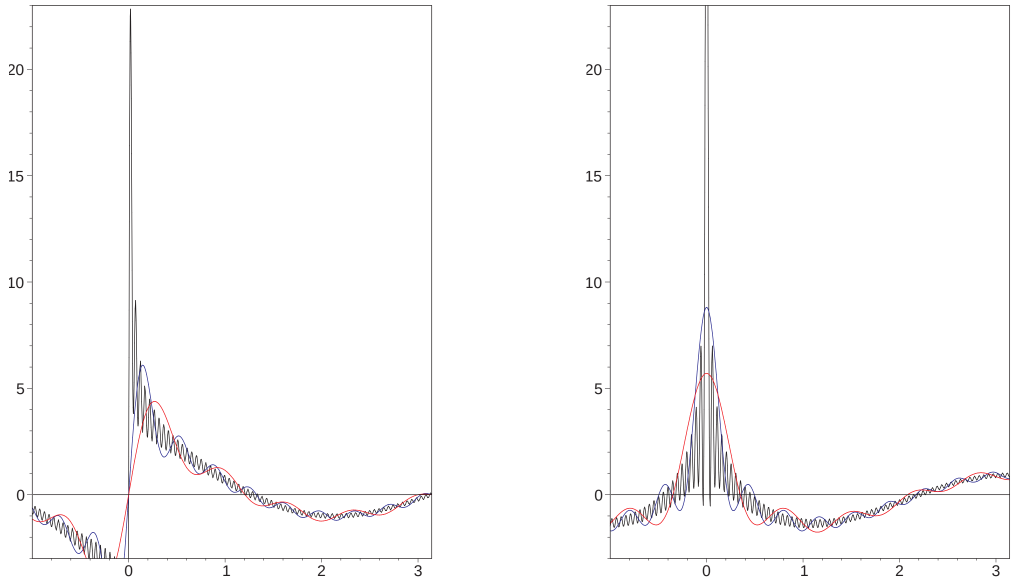


FIG. 6 – $\sum_{2\leq n\leq N} \frac{\sin(nx)}{\log(n)}$ et $\sum_{2\leq n\leq N} \frac{\cos(nx)}{\log(n)}$ pour $N = 9, 17, 129$. Le graphe de droite (pour $N = 129$) a été tronqué sur le haut. Les échelles horizontales et verticales diffèrent.



sa somme $G(x)$ est dans L^1 (on a $\lim_{x\to 0} G(x) = +\infty$, mais il se trouve que cette singularité n'est pas suffisamment sévère pour rendre G non-intégrable au sens de Lebesgue [18]). L'expression $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{\log(n)}$ est bien la série de Fourier de G, calculée par les formules de Fourier (et l'intégrale de Lebesgue), mais la série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{\log(n)}$ n'est pas convergente au sens L^1 (ses sommes partielles restent cependant bornées au sens L^1). Ma petite digression ne serait pas terminée sans évoquer la série cousine $K(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\log(n)}$ (voir la figure 6 pour des sommes partielles des séries définissant K (à gauche) et G (à droite)). La série converge pour tout x, K est une fonction impaire continue sauf en 0 (modulo 2π), et elle n'est pas intégrable au sens de Lebesgue : on a $\int_0^{\pi} |K(x)|\, dx = +\infty$. Cependant la théorie de Denjoy appelée « totalisation complète » donne un sens à des intégrales plus générales que celles de Lebesgue et les formules de Fourier sont alors valables pour toute série trigonométrique partout convergente, comme ici celle définissant

18. On a $G(x) \sim \frac{\pi}{2}(x\log^2(x))^{-1}$ pour $x \to 0^+$. Plus généralement, soit $a > 0$. Alors $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\log^a(n)} \sim \frac{1}{x|\log x|^a}$ et $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{\log^a(n)} \sim \frac{\pi a}{2x|\log x|^{a+1}}$ pour $x \to 0^+$. Les séries convergent pour $x \notin 2\pi\mathbf{Z}$ par le test d'Abel-Dirichlet.

la fonction K.[19]

LXXI (Continuité des translations) Soit f une fonction 2π-périodique, de carré intégrable sur une période. Soit $f_u(x) = f(x+u)$. Que vaut $\|f_u\|_2$? On suppose f continue, montrer que $u \mapsto f_u$ est continue de $\mathbf{R}$ vers L^2. On ne suppose plus f continue, montrer à nouveau que $u \mapsto f_u$ est continue de $\mathbf{R}$ vers L^2, en utilisant la densité des fonctions continues.

LXXII (suite) En utilisant l'identité de Bessel-Parseval, donner une formule pour $\|f_u - f_v\|_2$. Prouver à nouveau $\lim_{v\to u} f_v = f_u$ au sens L^2, pour toute $f \in L^2$.

LXXIII (suite) Soit f et g dans L^2. Déduire de ce qui précède que $f * g$ est une fonction continue (on écrira $(f*g)(x)$ comme un produit scalaire entre une fonction fixe et une dépendant de x). Montrer que sa série de Fourier est absolument convergente.

Rappel du cours : un espace hermitien V est un espace vectoriel complexe muni d'un produit scalaire « hermitien défini positif » (u, v), c'est-à-dire linéaire en u, conjugué linéaire en v, avec $(u, u) \geq 0$ et $(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$. En posant $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$ on a une inégalité de Cauchy-Schwarz : $|(u, v)| \leq \|u\|\|v\|$. De plus on a une norme : $\|u\| \geq 0$ avec égalité seulement si $u = 0$, $\|\alpha \cdot u\| = |\alpha|\|u\|$, $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$. Si V est **complet** comme espace métrique pour la distance $d(u, v) = \|u - v\|$, on dit que V est un **espace de Hilbert**. Dans un espace vectoriel hermitien (complet ou non) on dit que u est perpendiculaire à un ensemble A si pour tout v de A on a $(u, v) = 0$, et l'on note $u \perp A$, et aussi $A^\perp$ est $\{u \in V \mid u \perp A\}$: c'est toujours un sous-espace vectoriel de V. Un **espace de Banach** est une notion plus générale : c'est un espace vectoriel complexe avec une norme $\|u\|$ et complet comme espace métrique pour la distance $d(u, v) = \|u - v\|$. Il y a une norme, mais non nécessairement déduite d'un produit scalaire.

LXXIV Montrer $\Big| \|u\| - \|v\| \Big| \leq \|u - v\|$ dans tout espace vectoriel normé V.

LXXV (suite) Montrer que $u \mapsto \|u\|$ est une application continue de V vers $\mathbf{R}^+$.

LXXVI (suite) On suppose $V = \mathbf{C}^N$. Montrer qu'il existe $0 < c_1 \leq c_2$ avec $c_1 \cdot (|z_1| + \cdots + |z_N|) \leq \|u\| \leq c_2 \cdot (|z_1| + \cdots + |z_N|)$ pour tout $u = (z_1, \ldots, z_N)$.

LXXVII (suite) En déduire que la topologie est la même pour toutes les normes sur $\mathbf{C}^N$. Montrer que tout espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach.

LXXVIII Soit V un espace vectoriel normé. Montrer que V est un espace de Banach (c'est-à-dire est complet comme espace métrique) si et seulement si toute série $\sum_{k=1}^\infty g_k$ vérifiant $\sum_{k=1}^\infty \|g_k\| < \infty$ est convergente.

LXXIX On prend $V = L^1(a, b; dx)$ (ou L^2). Assurez-vous que voua avez compris la démonstration du cours qui dit que si $\sum_{k=1}^\infty \|g_k\| < \infty$ alors la série $G(x) = \sum_{k=1}^\infty g_k(x)$ est presque partout (absolument) convergente, et que $G = \sum_{k=1}^\infty g_k$ aussi au sens L^1 (respectivement, L^2).

LXXX Montrer que dans $L^1(a, b; dx)$ ou $L^2(a, b; dx)$ toute suite de Cauchy possède une sous-suite qui est presque partout (ponctuellement) convergente.

19. Aussi, dans le cadre de la théorie de Denjoy, toute fonction dérivable sur un intervalle est l'intégrale de sa dérivée, même si cette dérivée n'est pas intégrable au sens de Lebesgue. Vous en savez autant que moi maintenant.