XXXVI (Encore Riemann !) Je ne voudrais surtout pas donner l'impression que l'examen portera sur des questions d'intégrale de Riemann, certainement pas. Mais je dois m'assurer que vous connaissez l'Analyse des années antérieures. Alors je vous demande de prouver que lorsque f est R-intégrable sur $[a, b]$ alors la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est une fonction continue sur $[a, b]$. Je rappelle, mais c'est tout à fait autre chose, que si x_0 est un point de continuité de f alors il est un point de dérivabilité de F avec $F'(x_0) = f(x_0)$.

XXXVII (Enfin Lebesgue !) On reprend l'exercice précédent, mais on suppose seulement que f est Lebesgue-intégrable. Il s'agit à nouveau de montrer la continuité de $x \mapsto F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Montrer-le lorsque f est bornée (si vous vous êtes bien débrouillé(e) dans l'exercice précédent c'est l'unique propriété de f que vous y aurez utilisé). Revenons au cas général. Pour chaque n entier ≥ 1, soit $f_n(x) = f(x)$ si $|f(x)| \leq n$, et $= 0$ si $|f(x)| > n$. On pose $F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\,dt$. On pose $r_n = \int_{\{|f(t)|>n\}} |f(t)|\,dt = \int_a^b \mathbf{1}_{\{|f(t)|>n\}}(t)|f(t)|\,dt$. En utilisant le théorème de la convergence monotone, montrer $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$. En déduire $F_n \rightrightarrows F$ sur $[a, b]$. Montrer que les F_n sont continues et en déduire que F est continue. Si vous le voulez, donnez une toute autre démonstration, sans passer par les f_n, par exemple en utilisant le théorème de la convergence dominée. [10]

XXXVIII (convolution de fonctions intégrables) On considère deux fonctions f et g sur $\mathbf{R}$ (à valeurs complexes éventuellement). On suppose f et g intégrables. Par quel(s) théorème(s) du cours d'intégration justifiez-vous l'existence de la fonction $k(x) = \int_{\mathbf{R}} f(x-t)g(t)dt$? La fonction k est-elle a priori définie pour <u>tout</u> x ? Et si f ou g est bornée ? Et si f et g sont à valeurs positives ? On note $k = f * g$. Montrer $k = g * f$. Montrer que k est intégrable. Que vaut $\int_{\mathbf{R}} k(x)dx$? Montrer $f_1 * (f_2 * f_3) = (f_1 * f_2) * f_3$.

XXXIX (convolution de fonctions périodiques) On suppose que f et g sont toutes deux T-périodiques, intégrables sur $[0, T]$, et l'on définit $k(x) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x-t)g(t)dt$. Par quel(s) théorème(s) justifiez-vous l'existence de la fonction k ? La fonction k est-elle a priori <u>partout</u> définie ? Donner des cas où elle l'est. Montrer $k(x) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x-t)g(t)dt$. Montrer que k est T-périodique. On utlise à nouveau la notation à nouveau $k = f*g$ [11]. Que vaut $\frac{1}{T}\int_0^T (f*g)(x)dx$? Prouver $f_1 * (f_2 * f_3) = (f_1 * f_2) * f_3$.

XL (Cesàro) Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle ou complexe. Soit $v_n = \frac{u_0+\cdots+u_{n-1}}{n}$. On suppose $\lim u_n = L$, montrer $\lim v_n = L$.

XLI (suite) Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle et $v_n = \frac{u_0+\cdots+u_{n-1}}{n}$. Montrer :

$$\underline{\lim}\, u_n \leq \underline{\lim}\, v_n \leq \overline{\lim}\, v_n \leq \overline{\lim}\, u_n$$

et en déduire à nouveau le théorème de Cesàro de l'exercice précédent.

10. à propos, si x_0 est un point de continuité de f alors, comme pour les fonctions R-intégrables, $F'(x_0)$ existe et vaut $f(x_0)$. Bien qu'une fonction L-intégrable puisse n'avoir aucun point de continuité, Lebesgue a démontré (c'est très difficile) qu'en toute généralité F est toujours presque partout dérivable avec $F' = f$ p.p.

11. on notera que la fonction périodique g ne peut être intégrable sur $\mathbf{R}$ tout entier que si elle est nulle, donc il ne peut pas y avoir de conflit avec l'exercice précédent.

Je rappelle les notations $\mathcal{O}$ et o : par exemple écrire $c_n = \mathcal{O}(\frac{1}{n})$ c'est dire qu'il existe une constante K telle que $|c_n| \leq \frac{K}{n}$ (pour $n \geq 1$, ou pour tout n suffisamment grand ce qui revient au même quitte à changer K).

XLII (Cesàro pour les séries ; Théorème taubérien faible) On se donne une série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ de nombres réels ou complexes. On note $s_n = x_0 + \cdots + x_n$ et pour $n \geq 1$:

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1}}{n}$$

Exprimer les σ_n en fonction des x_m. On dit que la série a la Cesàro-somme L si $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = L$. Montrer :

$$s_n - \sigma_n = \frac{1x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n}{n}$$

En déduire : si la série a L comme Cesàro somme et si $x_n = o(\frac{1}{n})$ alors la série converge vers L.

XLIII Montrer que pour une série à termes positifs la Cesàro-convergence équivaut à la convergence tout court (si vous êtes fainéant ou savant, vous n'aurez qu'à invoquer le théorème de la convergence monotone dans un contexte approprié ; mais ça ne fait pas de mal non plus de donner une démonstration directe).

XLIV (Théorème taubérien de Hardy) On reprend l'exercice XLII. On va montrer que l'on a la même conclusion en supposant seulement $x_n = \mathcal{O}(\frac{1}{n})$. En supposant $|x_j| \leq \frac{K}{j}$ pour $j \geq 1$ établir

$$n < m \implies \quad \left| \frac{s_n + \cdots + s_{m-1}}{m-n} - s_n \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{m-1} \frac{m-k}{m-n} x_k \right| \leq K \sum_{k=n+1}^{m-1} \frac{1}{k} \leq K \log \frac{m-1}{n} \,.$$

Prouver ensuite $\frac{s_n + \cdots + s_{m-1}}{m-n} = \frac{\sigma_m - \frac{n}{m}\sigma_n}{1 - \frac{n}{m}}$ puis en déduire : [12]

$$\forall \Lambda > 1 \; \forall n \geq 1 \qquad |s_n - L| \leq \frac{\Lambda}{\Lambda - 1} \big(|\sigma_n - L| + |\sigma_{[\Lambda n]+1} - L| \big) + K \log \Lambda \,.$$

Conclure. Ce renforcement du théorème très facile établi dans l'exercice XLII est dû à Hardy. [13]

XLV (Application aux séries de Fourier) Soit f une fonction 2π-périodique dont les coefficients de Fourier $c_n(f)$ sont $\mathcal{O}(\frac{1}{|n|})$. Montrer $\lim \; S_N(f)(x) = f(x)$ en tout point de continuité de f et plus généralement $\lim_{N\to\infty} S_N(f)(x) = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$ si $f(x^+)$ et $f(x^-)$ existent.

XLVI (Fonctions monotones) Soit f croissante sur l'intervalle $[a, b]$. On pose $f(t) = 0$ pour $t > b$ et $t < a$. Soit $n \in \mathbf{N}$, suffisamment grand (on prendra $n \geq 2\frac{\pi}{b-a} + 1$). Montrer

12. on note $[x]$ la partie entière du nombre réel x

13. Tauber avait montré le théorème suivant : si les a_n sont $o(n^{-1})$ et si $\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = L$ alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge et vaut L (dans le sens inverse et sans hypothèse sur les a_n c'était un célèbre résultat d'Abel). Remarquez l'analogie entre les sommes $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $(x < 1)$ et les sommes $C(N) = \sum_{n=0}^{N} (1 - \frac{n}{N}) a_n$. À propos on peut d'ailleurs montrer que si $\lim C(N) = L$ existe alors $\lim_{x\to 1^-} A(x)$ existe aussi et vaut L (théorème de Frobenius qui est donc un renforcement du théorème d'Abel). Pour les $C(N)$ donc, Hardy a montré que sous l'hypothèse $a_n = \mathcal{O}(n^{-1})$, $\lim C(N) = L \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n = L$. C'est Littlewood qui a prouvé que le théorème initialement prouvé par Tauber pour $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ valait sous l'hypothèse $a_n = \mathcal{O}(n^{-1})$. Compte tenu du résultat de Frobenius, le théorème de Littlewood implique celui de Hardy. Il est nettement plus difficile à prouver.

$\int_a^b f(t)e^{int}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(f(t) - f(t+\frac{\pi}{n}))e^{int}\,dt$ puis en déduire

$$2\left|\int_a^b f(t)e^{int}\,dt\right| \leq \frac{\pi}{n}\sup|f| + \int_a^{b-\frac{\pi}{n}}(f(t+\frac{\pi}{n}) - f(t))\,dt + \frac{\pi}{n}\sup|f| \leq 4\frac{\pi}{n}\sup|f|$$

En déduire que les coefficients de Fourier d'une fonction monotone par morceaux sont $\mathcal{O}(\frac{1}{|n|})$. En déduire en utilisant les résultats précédents que la série de Fourier d'une fonction f monotone par morceaux est partout convergente de limite au point x égale à $\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$ (c'est là le vrai Théorème de Dirichlet, que celui-ci a prouvé par une méthode plus directe, complètement différente).

XLVII Si f est continue, et si ses coefficients de Fourier sont $\mathcal{O}(\frac{1}{|n|})$, montrer (en utilisant l'inégalité de l'exercice XLIV) que sa série de Fourier converge uniformément vers f.

XLVIII (suite) Montrer qu'une fonction continue et de classe C^1 par morceaux a des coefficients de Fourier qui sont $\mathcal{O}(\frac{1}{|n|})$. Conclure que sa série de Fourier converge uniformément.[14]

XLIX (Fonctions Lipschitziennes) Soit f (2π-périodique) telle qu'il existe une constante Λ avec $|f(u) - f(v)| \leq \Lambda|u - v|$ (condition de Lipschitz). Bien sûr, f est nécessairement continue. Montrer $c_n(f) = \mathcal{O}(\frac{1}{|n|})$. Ind. : calculer $\int_0^{2\pi} e^{-inx}f(x+\frac{\pi}{n})dx$. En déduire par un exercice précédent que la série de Fourier de f est uniformément convergente.[15]

L (Sommation d'Abel-Dirichlet) Montrer $\sum_{0\leq k\leq n} u_k v_k = \sum_{0\leq j\leq n} S_j(v_j - v_{j+1}) + S_n v_{n+1}$ avec $S_j = u_0 + \cdots + u_j$. En déduire que si les S_j sont bornées et si $\sum|v_j - v_{j+1}| < \infty$ et $\lim v_j = 0$ alors la série de terme général $u_k v_k$ est convergente, et

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k v_k = \sum_{j=0}^{\infty} S_j(v_j - v_{j+1})$$

Montrer de plus : $\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k v_k\right| \leq \sup_{k>n}|S_k - S_n|\sum_{k=n+1}^{\infty}|v_k - v_{k+1}|$ et en déduire le Test de Dirichlet : si les S_j sont bornées et si les v_j forment une suite décroissant vers 0 alors la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k v_k$ converge et $\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k v_k\right| \leq v_{n+1}\sup_{k>n}|S_k - S_n| \leq 2\,v_{n+1}\sup_{j\geq 0}|S_j|$.

LI Soit $0 < a < b < 2\pi$, et soit $f = \mathbf{1}_{]a,b[}$. Montrer que $S_N(f)(t)$ peut se mettre sous la forme :

$$S_N(f)(t) = \frac{b-a}{2\pi} + \sum_{n=1}^{N}\frac{\sin(n(t-a)) - \sin(n(t-b))}{\pi n}$$

En utilisant alors la sommation d'Abel-Dirichlet (c'est-à-dire l'exercice L), montrer

$$\left|\mathbf{1}_{]a,b[}(t) - S_N(f)(t)\right| \leq \frac{1}{(N+1)\pi}\left(\frac{1}{|\sin(\frac{t-a}{2})|} + \frac{1}{|\sin(\frac{t-b}{2})|}\right)$$

En déduire que si ϕ est une fonction en escalier alors sa série de Fourier converge uniformément sur tout intervalle fermé inclus dans un intervalle ouvert sur lequel ϕ est constante.

LII (suite) Soit F une fonction intégrable qui est identiquement nulle sur un intervalle ouvert $]u, v[$. Montrer que les sommes partielles $D_N * F$ de sa série de Fourier converge uniformément vers zéro sur tout sous intervalle fermé $[u', v'] \subset]u, v[$. On remarquera qu'il existe

14. on montrera dans un autre exercice qu'en fait $\sum_{n\in\mathbf{Z}}|c_n(f)| < \infty$ dans ce cas.

15. Remarque : on peut prouver nettement mieux, à savoir $\sum_{n\in\mathbf{Z}}|c_n(f)| < \infty$ (théorème de Bernstein). Donc la série de Fourier est en fait normalement convergente.

K avec $|D_N(x-t)| \leq K$ pour tout N, tout $x \in [u', v']$ et tout $t \notin]u, v[$. Pour tout $\epsilon > 0$ on choisira ϕ en escalier, identiquement nulle sur $]u, v[$ et avec $\|F - \phi\|_1 \leq \epsilon$; puis on utilisera l'exercice précédent. Soit plus généralement une fonction F intégrable et qui est de classe C^1 sur l'intervalle ouvert $]u, v[$. Montrer que sa série de Fourier converge uniformément sur tout sous-intervalle fermé $[u', v'] \subset]u, v[$.

LIII En appliquant l'identité de Parseval à la fonction $\mathbf{1}_{]\pi-a,\pi+a[}$ pour $0 < a < \pi$, établir :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin^2(na)}{n^2} = \frac{a(\pi - a)}{2}$$

Obtenir une formule équivalente en développant en série de Fourier la fonction 2π-périodique (paire) qui vaut $x(2\pi - x)$ pour $0 < x < 2\pi$.

LIV (forme bilinéaire de l'identité de Parseval) Soit f et g 2π-périodiques de carrés intégrables. Montrer :

$$\int_X f(t)\overline{g(t)}\frac{dt}{2\pi} = \sum_{m\in\mathbf{Z}} c_m(f)\overline{c_m(g)} = \frac{a_0(f)\overline{a_0(g)}}{4} + \sum_{n\geq 1} \frac{a_n(f)\overline{a_n(g)} + b_n(f)\overline{b_n(g)}}{2} ,$$

$$\int_X f(t)g(t)\frac{dt}{2\pi} = \sum_{m\in\mathbf{Z}} c_m(f)c_{-m}(g) = \frac{a_0(f)a_0(g)}{4} + \sum_{n\geq 1} \frac{a_n(f)a_n(g) + b_n(f)b_n(g)}{2} ,$$

avec des séries absolument convergentes (ce qui autorise les notations $m \in \mathbf{Z}$, ou $n \geq 1$).

LV (Fonctions de classe C^1) Montrer $\sum_{n\in\mathbf{Z}} |c_n(f)| < \infty$ pour toute fonction f continue 2π-périodique et de classe C^1 par morceaux. (Ind. : que vaut $c_n(f')$? utiliser l'inégalité de Bessel pour f' et l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $l^2(\mathbf{Z})$ pour majorer $\sum_{1\leq|n|} |c_n(f)|$ en fonction de $\|f'\|_2$). En déduire que la série de Fourier d'une fonction f continue et de classe C^1 par morceaux est normalement convergente (vers f).

LVI (suite) En reprenant la preuve de l'exercice précédent prouver $\sum_{|n|\geq 1} |n|^a |c_n(f)| < \infty$ pour tout $a < \frac{1}{2}$. Prouver même $\sum_{|n|\geq 2} \frac{\sqrt{|n|}|c_n(f)|}{\log|n|} < \infty$. En déduire que pour tout $\epsilon > 0$ il existe une infinité de $n > 0$ tels que $|c_n(f)| \leq \epsilon \frac{1}{n\sqrt{n}}$. Montrer par ailleurs $c_n(f) = o(\frac{1}{|n|})$.

LVII (suite) Montrer $c_n(f) = o(\frac{1}{n^2})$ et $\sum_{n\in\mathbf{Z}} |n|^{5/4}|c_n(f)| < \infty$ pour toute fonction f de classe C^2 et 2π-périodique.

LVIII (au-delà de Parseval) Soient f, g, k, trois fonctions dont la série de Fourier « complexe » est absolument convergente (par exemple des fonctions de classe C^1). Montrer :

$$\int_X f(t)g(t)k(t)\frac{dt}{2\pi} = \sum_{\substack{m_1,m_2,m_3\in\mathbf{Z} \\ m_1+m_2+m_3=0}} c_{m_1}(f)c_{m_2}(g)c_{m_3}(k)$$

avec une somme absolument convergente. À propos le théorème de Fubini dans le cas particulier de l'espace mesuré $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, c'est quoi ?

LIX Déterminer les séries de Fourier des fonctions « triangles » c'est-à-dire des fonctions dont le graphe forme, essentiellement, un triangle.