XXI (Riemann-intégrabilité) En utilisant la définition donnée en cours de l'intégrabilité au sens de Riemann d'une fonction f (que l'on prendra à valeurs réelles, le cas à valeurs complexes s'y ramenant en séparant parties réelles et imaginaires) sur un intervalle $[a, b]$ borné, re-donner les démonstrations vues en premier cycle (soit en cours, soit dans les livres sur lesquels vous aurez travaillé, à la bibliothèque, ou chez vous) de la R-intégrabilité des fonctions monotones et aussi des fonctions continues. Pour ces dernières vous ferez la démonstration en utilisant la continuité uniforme. Cet exercice est typiquement quelque chose à propos de quoi je vais donner des consignes à mes collègues en TD de ne pas s'attarder plus de dix minutes. Car on ne va pas non plus rabâcher quinze fois les programmes antérieurs. Alors soit vous aurez travaillé chez vous dessus et les indications pendant les travaux dirigés serviront juste à vous rassurer, soit vous n'aurez rien fait et alors vous aurez pris vos responsabilités. Même consigne pour les trois exercices qui suivent.

XXII (suite) Soit U une fonction en escalier, à valeurs réelles, sur $[a, b]$, et $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ une subdivision adaptée, avec les valeurs successives α_j sur $]x_j, x_{j+1}[$. Les valeurs prises aux points x_j ne sont pas importantes et resteront non spécifiées. Aussi on supposera $N \geq 2$. Soit $\eta = \min(x_{j+1} - x_j, 0 \leq j < N)$ et soit $\delta > 0$ et $< \frac{1}{2}\eta$. Soit g la fonction continue affine par morceaux obtenue à partir de U en posant $g = U$ en dehors des intervalles $]x_j - \delta, x_j + \delta[$ $(1 \leq j < N)$ et interpolant linéairement dans ces intervalles. Bien sûr $g(a)$ et $g(b)$ sont respectivement α_0 et α_{N-1} de sorte que g est continue sur $[a, b]$. Quelle est la valeur exacte de $\int_a^b |U(t) - g(t)|\,dt$? En déduire qu'elle tend vers zéro avec δ. En déduire que pour toute fonction R-intégrable et tout $\epsilon > 0$ il existe une fonction g continue sur $[a, b]$ avec $\int_a^b |f(t) - g(t)|\,dt \leq \epsilon$.

XXIII Comme je l'ai rappelé en cours, presque directement comme conséquence de la définition de la R-intégrabilité, si f (à valeurs complexes) l'est sur $[a, b]$, et si $\epsilon > 0$ est donné, alors il existe U en escalier avec $\int_a^b |f(t) - U(t)|\,dt \leq \epsilon$. Montrer que quitte à modifier U on peut imposer de plus $\sup_{[a,b]} |U(t)| \leq C = \sup_{[a,b]} |f(t)|$. Indication : soit $(x_i)_{0 \leq i \leq N}$ une subdivision adaptée à U, soit α_i la valeur prise sur $]x_i, x_{i+1}[$. Si $|\alpha_i| > C$ remplacez le par $\beta_i = C\alpha_i/|\alpha_i|$.

XXIV Soit f, à valeurs complexe, R-intégrable sur $[a, b]$, soit $\epsilon > 0$ et soit g continue sur $[a, b]$ avec $\int_a^b |f(t) - g(t)|\,dt \leq \epsilon$. Soit $C = \sup |f|$, montrer qu'il existe k continue vérifiant $\int_a^b |f(t) - k(t)|\,dt \leq \epsilon$, et aussi $\sup |k| \leq C$. Indications : si f est identiquement nulle c'est trivial donc on peut supposer $C > 0$. Soit $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ la fonction définie par $F(z) = z$ si $|z| \leq C$ et $F(z) = Cz/|z|$ si $|z| > C$. Montrer que F est une fonction continue sur $\mathbf{C}$. Montrer que la fonction $k(t) = F(g(t))$ est une fonction continue qui convient.

XXV («continuité des translations») Voici un exercice portant sur un point très important. Soit f R-intégrable sur $[a, b]$. On pose $f(t) = 0$ si $t < a$ ou si $t > b$. En utilisant l'approximation par des fonctions en escalier, montrer :

$$\lim_{h \to 0} \int_a^b |f(t + h) - f(t)|\,dt = 0$$

Comme je l'expliquerai en cours, l'approximation par une (mais **pas l'encadrement par deux**) fonction en escalier vaut aussi pour les fonctions intégrables au sens de Lebesgue. Donc le résultat ci-dessus vaut en toute généralité : c'est une chose d'importance majeure. En fait on a ici quelque chose qui est plus du cours qu'un exercice : mais vous savez bien que le meilleur exercice c'est le cours ; regardez vos notes de cours et à chaque fois que vous voyez une démonstration essayez de la retrouver par vous-même. Si vous faites cela tout sera facile. Faites aussi la variante où l'on a des fonctions 2π-périodiques, et $a = 0$ et $b = 2\pi$.

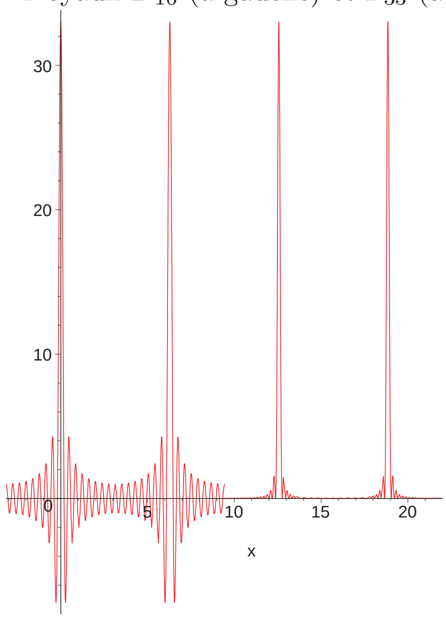
XXVI (la convolution régularise) Dans cet exercice on utilisera l'intégrale de Lebesgue, le théorème de la convergence dominée et le critère que l'on en déduit de dérivabilité des intégrales à paramètres. On suppose que f et g sont 2π-périodiques, intégrables. [5] Justifier que $f * g$ est continue dès que f l'est. [6] Montrer que $f * g$ est de classe C^k si f l'est. Montrer que $f * g$ est de classe C^{k+q} si f est de classe C^k et si g est de classe C^q.

Dorénavant et sauf précision du contraire, on ne se limite plus aux fonctions intégrables au sens de Riemann, on utilise la théorie de Lebesgue, et surtout les théorèmes associés.

XXVII En utilisant le théorème d'unicité caractériser sur les coefficients de Fourier $c_n(f)$, respectivement $a_n(f)$ et $b_n(f)$ le fait pour f d'être : à valeurs réelles, d'être paire, impaire, à valeurs réelles et paire, à valeurs réelles et impaire. Comme ici f n'est définie qu'à l'équivalence presque partout près, préciser ce que cela signifie exactement.

XXVIII (convolution et coefficients de Fourier) Rappelons la notation $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_I f(t)e^{-int}dt$, pour $n \in \mathbf{Z}$ et f une fontion 2π-périodique et intégrable (sur une période), et I un intervalle quelconque de longueur 2π. En utilisant le théorème de Fubini prouver $c_n(f_1 * f_2) = c_n(f_1)c_n(f_2)$. On note e_n la fonction e^{inx}. Quelle est la fonction $e_n * f$? On rappelle les notations usuelles $\genfrac{}{}{0pt}{}{a_n}{b_n}(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}(nt)dt$. Quelles sont les fonctions $\cos(n\,\cdot\,) * f$ et $\sin(n\,\cdot\,) * f$?

FIG. 3 – Noyaux D_{16} (à gauche) et F_{33} (à droite)



5. lorsque l'on dit d'une fonction qu'elle est « intégrable » on fait référence à l'intégrale de Lebesgue ; si l'on veut se restreindre à l'intégrale de Riemann on dit R-intégrable.

6. en fait $f * g$ est continue dès que soit f soit g est bornée. Vous pourrez déduire cela de la validité du théorème de «continuité des translations» XXV pour les fonctions L-intégrables.

XXIX (Approximations de l'identité) Sur la base de la figure 3 faites l'éloge de Fejér. On dira que des fonctions 2π-périodiques $K_n(x)$ (définies disons pour $n \geq 1$) forment (dans le cadre des fonctions 2π-périodiques) une « approximation de l'identité » si :

1. $\forall n \geq 1 \quad \int_{-\pi}^{+\pi} K_n(t) \frac{dt}{2\pi} = 1$,
2. il existe une constante C avec $\forall n \geq 1 \quad \int_{-\pi}^{+\pi} |K_n(t)| \frac{dt}{2\pi} \leq C$,
3. et pour tout $0 < \delta < \pi$ on a $K_n \overset{[-\pi,+\pi]\setminus]-\delta,+\delta[}{\Longrightarrow} 0$

Montrer (en reprenant la démonstration donnée en cours) que si $(K_n)_{n\geq 1}$ est une approximation de l'identité et f une fonction 2π-périodique (L-intégrable), alors on a $K_n * f(x) \to f(x)$ en tout point de continuité x de f.[7]

XXX (suite) Donner un exemple d'approximation de l'identité avec de plus la propriété que $K_n(t) = 0$ pour $-\pi \leq t \leq 0$. Montrer dans ce cas que $\lim(K_n * f)(x_0) = f(x_0^-)$ pour toute fonction f (intégrable) et tout point où $f(x_0^-)$ existe (bien sûr lorsque f est continue au point x_0 on retrouve la résultat précédent).

XXXI (suite) Donner un exemple d'approximation de l'identité avec $\lim \int_0^{+\pi} K_n(t) \frac{dt}{2\pi} = \frac{3}{5}$. Pour une fonction f et un point x_0 où $f(x_0^+)$ et $f(x_0^-)$ existent, que vaut $\lim(K_n * f)(x_0)$?

XXXII (Riemann-Lebesgue pour les fonctions C^1) On suppose que f est une fonction de classe C^1 sur un intervalle ouvert I. Soit $[a, b] \subset I$; montrer qu'il existe une constante $C = C(f, a, b)$ telle que $|\int_a^b \cos(\lambda x) f(x) dx| \leq \frac{C}{\lambda}$ et $|\int_a^b \sin(\lambda x) f(x) dx| \leq \frac{C}{\lambda}$ pour $\lambda \geq 1$. On donnera une expression explicite pour une constante C qui marche.

XXXIII (Riemann-Lebesgue (suite)) Soit f intégrable sur $\mathbf{R}$ et soit ϕ de classe C^1 à support compact. Montrer en utilisant l'exercice précédent $\overline{\lim}_{\lambda\to+\infty} |\int_{\mathbf{R}} {}^{\cos}_{\sin}(\lambda x) f(x) dx| \leq \int_{\mathbf{R}} |f(t) - \phi(t)| dt$. En déduire (Lemme de Riemann-Lebesgue)

$$\overline{\lim_{\lambda\to+\infty}} \left| \int_{\mathbf{R}} {}^{\cos}_{\sin}(\lambda x) f(x) dx \right| = 0$$

en admettant que les fonctions C^1 à support compact forment une partie dense de $L^1(\mathbf{R})$. Prouver que c'est le cas en admettant que les fonctions en escalier[8] sont denses dans $L^1(\mathbf{R})$.

XXXIV (suite) Soit f intégrable sur $\mathbf{R}$.

1. Montrer astucieusement $|\int_{\mathbf{R}} e^{i\lambda x} f(x) dx| \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} |f(x + \frac{\pi}{\lambda}) - f(x)| dx$,
2. et par ailleurs montrer pour toute fonction U en escalier (à support compact, c'est-à-dire U intégrable) : $\overline{\lim}_{h\to 0} \int_{\mathbf{R}} |f(x+h) - f(x)| dx \leq 2 \int_{\mathbf{R}} |f(t) - U(t)| dt$.

Prouver à nouveau le Lemme de Riemann-Lebesgue en admettant la densité au sens L^1 des fonctions en escalier.

XXXV (Problème) Rapppel : $\sum_{0\leq j<n} j = 1 + \cdots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}$ et $\sum_{0\leq j<n} j^2 = \frac{n(2n^2-3n+1)}{6}$.

1. Exprimer $D_n(x)$ en fonction des $\cos(kx)$, $0 \leq k \leq n$, et justifier les inégalités $D_n(x) \leq$

7. Attention, dans les feuilles d'exercices de l'année précédente la notion d'«approximation de l'identité» était définie un peu différemment.

8. ne pas confondre « en escalier » qui fait intervenir des intervalles et « étagé » qui fait intervenir des parties mesurables générales.

$D_n(0)$ et $0 \leq F_n(x) \leq F_n(0)$.

2. Montrer $0 \leq F_N(x) \leq \min(N, \frac{1}{N}\frac{\pi^2}{x^2})$ pour tout $x \in]0,\pi]$ et tout $N \geq 1$.

3. On considère un polynôme trigonométrique $P(x)$ du type $\sum_{0\leq k\leq N} v_k \cos(kx)$. Reprouver $\int_{-\pi}^{\pi} P^2(x)\frac{dx}{2\pi} = v_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{1\leq k\leq N} v_k^2$.

4. Que valent les v_k dans l'expression $F_N(x) = \sum_{0\leq k\leq N} v_k \cos(kx)$? (ils dépendent aussi de N)

5. On note $\lambda_N = \int_{-\pi}^{\pi} F_N^2(x)\frac{dx}{2\pi}$. Prouver $\lambda_N = \frac{2}{3}N + \frac{1}{3}\frac{1}{N}$.

6. On pose $K_N(x) = \frac{1}{\lambda_N}F_N^2(x)$. Que vaut $\int_{-\pi}^{\pi} K_N(x)\frac{dx}{2\pi}$? Prouver pour tout $x \in]0,\pi]$ et tout $N \geq 1$:

$$0 \leq K_N(x) \leq \min(\frac{3}{2}N, \frac{3}{2N^3}\frac{\pi^4}{x^4})$$

7. Prouver (on considérera séparément $0 \leq x \leq \frac{\pi}{N}$ et $\frac{\pi}{N} \leq x \leq \pi$) :

$$0 \leq \int_{-\pi}^{\pi} K_N(x)|x|\frac{dx}{2\pi} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} K_N(x)x\, dx \leq \frac{3\pi}{2N}$$

8. On rappelle que l'on dit d'une fonction f qu'elle est Λ-Lipschitzienne si $\forall u, v\ |f(u) - f(v)| \leq \Lambda|u - v|$. Soit f une fonction 2π-périodique et Λ-Lipschitzienne. Montrer :

$$\forall N \geq 1 \qquad |(K_N * f)(0) - f(0)| \leq \frac{3\pi\Lambda}{2N}$$

9. Soit f une fonction 2π-périodique de classe C^1. Montrer :

$$\forall N \geq 1\ \forall x \qquad |(K_N * f)(x) - f(x)| \leq \frac{3\pi \sup|f'|}{2N}$$

10. Soit f une fonction 2π-périodique de classe C^1. En utilisant le résultat précédent, montrer[9] :

$$\|D_N * f - f\|_2 = \mathcal{O}(\frac{1}{N})$$

11. Donner une autre preuve, qui n'utilise pas les résultats précédents, de $\|D_N * f - f\|_2 = \mathcal{O}(\frac{1}{N})$ pour f 2π-périodique et de classe C^1. Montrer d'ailleurs par cette autre preuve le résultat plus fin $\|D_N * f - f\|_2 = o(\frac{1}{N})$.

12. Soit f une fonction 2π-périodique de classe C^1. Montrer :

$$\sup_{0\leq x\leq 2\pi} |F_N * f(x) - f(x)| = \mathcal{O}(\frac{\log N}{N}) .$$

On n'aura pas besoin des résultats précédents, mais il s'agit d'adapter aux noyaux de Fejér F_N la méthode suivie ici pour les noyaux (de Jackson) K_N.

9. il s'agit bien de D_N et non pas K_N dans la formule. On rappelle que $u_n = \mathcal{O}(\frac{1}{n})$ signifie $\exists C\ \forall n \geq 1\ |u_n| \leq \frac{C}{n}$. Et $\|g\|_2 = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 \frac{dx}{2\pi}}$.