Université Lille 1 — Licence de Mathématiques (L3, 2006/07)
MATH 312 — Responsable: J.-F. Burnol

I (Coefficients de Fourier) On utilisera tout le temps la notation

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt\,,$$

pour $n \in \mathbf{Z}$ et f une fonction intégrable sur $[-\pi, +\pi]$, la plupart du temps tacitement considérée comme étant 2π-périodique [1]. De plus lorsque l'on écrit quelque chose du genre

$$f \sim \sum_{-\infty}^{\infty} d_n e^{int}\ ,$$

tout ce que l'on veut dire par là c'est que $d_n = c_n(f)$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$, le symbole de sommation étant purement formel dans ce contexte. [2]

Soit I un intervalle quelconque de longueur 2π. Montrer $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_I f(t)e^{-int}dt$.

On utilisera toujours la notation

$$e_n(t) = e^{int}$$

de sorte que $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{e_n(t)}dt$. L'analogue du produit scalaire euclidien $\vec{x}\cdot\vec{y} = x_1y_1 + \dots + x_ky_k$ pour des vecteurs complexes est $x_1\overline{y_1} + \dots + x_k\overline{y_k}$. Par analogie, on définit donc pour les fonctions 2π-périodiques $(f, g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$. Ainsi $c_n(f) = (f, e_n)$, pour tout $n \in \mathbf{Z}$.

II On rappelle les notations usuelles $\begin{smallmatrix} a_n \\ b_n \end{smallmatrix}(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t) \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}(nt)dt$ (pour $n \in \mathbf{N}$). Faites bien attention au $\frac{1}{\pi}$ et non pas $\frac{1}{2\pi}$ devant l'intégrale. Exprimer les a_n et b_n $(n \geq 0)$ en fonction des c_m $(m \in \mathbf{Z})$ et réciproquement.

III (Relations d'« orthogonalité ») Soit I un intervalle de longueur 2π. Que valent $\int_I \cos(nt)\sin(mt)\frac{dt}{2\pi}$, $\int_I \cos(nt)\cos(mt)\frac{dt}{2\pi}$, $\int_I \sin(nt)\sin(mt)\frac{dt}{2\pi}$? Que valent les $\int_I e_n(t)\overline{e_m(t)}\frac{dt}{2\pi}$? et si la longueur $|I|$ de I n'est pas 2π ?

IV (Noyau [3] de Dirichlet) Prouver la formule suivante qui joue un rôle fondamental :

$$\begin{aligned}1 + 2\cos(x)\cos(y) + \dots + 2\cos(Nx)\cos(Ny) +& \\ + 2\sin(x)\sin(y) + \dots + 2\sin(Nx)\sin(Ny) \quad &= \quad \frac{\sin((N+\frac{1}{2})(x-y))}{\sin(\frac{1}{2}(x-y))}\end{aligned}$$

Le plus simple est sans doute d'utiliser les nombres complexes et/ou les formules de De Moivre (quoi qu'il en soit, donner une preuve par récurrence est moins élégant que de retrouver la

1. ce qui peut nécessiter de la redéfinir en π ou en $-\pi$.
2. Une bonne partie du début du Cours est consacré à voir quel sens donner à cette somme et à son égalité éventuelle avec f. Si cela n'est pas encore fait, je vous invite à revisiter d'urgence votre cours de deuxième année qui a déjà évoqué le sujet des séries de Fourier.
3. on appelle « noyau » une fonction $K(x, y)$ de deux variables, employée dans des formules du type $\psi(x) = \int K(x, y)\phi(y)dy$. Lorsque $K(x, y) = F(x-y)$ on parle de noyau de convolution (l'espace mesuré est alors supposé être un groupe additif muni d'une mesure invariante dy). Dans certains livres D_N est $\frac{1}{2}$ de notre D_N.

formule finale ex nihilo). On note $D_N(x) = 1 + 2\sum_{1\leq k\leq N}\cos(kx)$. Que vaut $D_N(0)$? Que vaut $\int_0^{2\pi} D_N(t)\frac{dt}{2\pi}$? Que valent les coefficients de Fourier réels et complexes de D_N ?

V (Noyau de Fejér) Le noyau de Fejér F_N est la moyenne arithmétique des N premiers noyaux de Dirichlet :

$$F_N(x) = \frac{D_0(x) + D_1(x) + \cdots + D_{N-1}(x)}{N}$$

Que valent les coefficients de Fourier réels et complexes de F_N ? Que vaut $F_N(0)$? Que vaut $\int_0^{2\pi} F_N(t)\frac{dt}{2\pi}$? Montrer la formule remarquable :

$$F_N(x) = \frac{\sin^2(\frac{Nx}{2})}{N\sin^2(\frac{x}{2})}$$

VI (séries de Fourier réelles et complexes) On parle souvent de « série de Fourier réelle » lorsque l'on utilise les cosinus et sinus et de « série de Fourier complexe » lorsque l'on utilise les exponentielles complexes. Mais une série de Fourier « réelle » a en fait des coefficients (qui peuvent être) complexes lorsque la fonction considérée est à valeurs complexes, et une série de Fourier « complexe » peut très bien n'avoir que des coefficients réels. Montrer :

1. une fonction à valeurs réelles a une série de Fourier en cos et sin à coefficients réels,
2. une fonction paire n'a que des cosinus dans sa série de Fourier ($b_n = 0$),
3. une fonction impaire n'a que des sinus dans sa série de Fourier ($a_n = 0$),
4. les coefficients c_n d'une fonction à valeurs réelles vérifient $c_{-n} = \overline{c_n}$,
5. les coefficients c_n d'une fonction paire vérifient $c_{-n} = c_n$,
6. les coefficients c_n d'une fonction impaire vérifient $c_{-n} = -c_n$.

VII Montrer que $\sum_{m\in\mathbf{Z}}|c_m(f)| < \infty$ équivaut à $\sum_{n\in\mathbf{N}}(|a_n(f)| + |b_n(f)|) < \infty$.

VIII On se donne a priori des nombres complexes a_n, b_n, $n \in \mathbf{N}$, et on suppose que la série $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt))$ converge pour tout t, uniformément sur l'intervalle $[0, 2\pi]$. Montrer que la somme $F(t)$ est une fonction continue sur $\mathbf{R}$, déterminer ses coefficients de Fourier $a_n(F)$, $b_n(F)$.

IX On se donne a priori des coefficients $d_m \in \mathbf{C}$, $m \in \mathbf{Z}$, vérifiant $\sum_{m\in\mathbf{Z}}|d_m| < \infty$, et on définit $F(t) = \sum_{m\in\mathbf{Z}} d_m e_m(t)$. Montrer que F est une fonction continue sur $\mathbf{R}$. Prouver $c_n(F) = d_n$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$.

X Quels sont, pour $u \in \mathbf{R}$ donné, les coefficients de Fourier a_n, b_n, c_n de la fonction $t \mapsto f(t+u)$ connaissant ceux de f ? Quels sont les coefficients de Fourier de $t \mapsto f(Nt)$, pour $N \in \mathbf{N}$?

Les exemples suivants de séries de Fourier sont tous dans le domaine d'application du théorème de Dirichlet ; l'idée est d'essayer de résoudre les exercices sans l'aide du théorème de Dirichlet, pour mieux l'apprécier, bien qu'il ne s'agisse là que du tout premier théorème de la théorie classique des séries de Fourier, dont la preuve figure dans les toutes premières pages (pour ne pas dire en note de bas de page...) des gros livres sur le sujet.

XI On considère la fonction 2π-périodique impaire f qui vaut $t - \pi$ sur $]0, \pi[$. Que vaut f sur $]\pi, 2\pi[$? que vaut f en les multiples de π ? Dessiner un graphe de f. Déterminer la série de

Fourier (« réelle » ou « complexe ») de la fonction f.

XII (suite) Soit w un nombre complexe de module 1, mais différent de -1. En majorant pour $0 \leq t < 1$ les restes dans la série de Taylor de $t \mapsto \frac{1}{1+tw}$ de ses sommes partielles, et en intégrant, montrer la validité de la formule $\mathrm{Log}(1+w) = w - \frac{1}{2}w^2 + \frac{1}{3}w^3 + \dots$. En déduire alors que la fonction f de l'exercice précédent est partout la somme de sa série de Fourier. (Rappel : soit AB un diamètre d'un cercle de centre C, soit M un point du cercle alors l'angle en A de BAM est la moitié de l'angle en C de BCM.)

XIII (suite ; sommation d'Abel et convergence uniforme) En utilisant la méthode de la sommation par parties (sommation d'Abel), prouver que la série de Fourier de la fonction f de l'exercice précédent est uniformément convergente sur tout intervalle $[\epsilon, 2\pi - \epsilon]$, $\pi > \epsilon > 0$. Il est aussi possible d'obtenir ce résultat en réexaminant nos majorations pour les restes dans la série de $\mathrm{Log}(1+w)$ pour $|w| = 1$. La série de Fourier de f est-elle uniformément convergente sur $[0, 2\pi]$? [4]

XIV (suite) On note $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, pour $0 \leq x < 2\pi$. Exhiber $F(x)$ dans cet intervalle comme la somme d'une certaine série de Fourier, en justifiant (considérer d'abord $\int_\epsilon^x$ puis $\epsilon \to 0$) la permutation de l'intégrale et de la somme infinie de sinus représentant f. Justifier sans autres calculs (utiliser l'exercice IX) que la série trigonométrique ainsi obtenue est bien donnée en fonction de F par les formules de Fourier. En particulier en calculant le zéro$^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier montrer $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$. Donner une autre preuve en calculant $F(\pi)$.

XV On considère une fonction 2π-périodique g qui vaut 1 sur $]0, \pi[$ et 0 sur $]\pi, 2\pi[$. Déterminer sa série de Fourier. On note $S_N(t)$ la somme partielle (jusqu'à $a_N \cos(Nt) + b_N \sin(Nt)$ inclus). Comment faut-il définir $g(0)$ et $g(\pi)$ pour qu'en ces points l'on ait $g(t) = \lim\ S_N(t)$? Prouver que l'on a $g(t) = \lim\ S_N(t)$ pour tout t avec convergence uniforme si l'on exclut un voisinage des points de discontinuité de g (indication pour cette question : examiner $f(t+\pi) - f(t)$ avec le f de XI).

XVI (suite) Développer $x \mapsto x$ $(0 < x < \pi)$ en une série de Fourier en cosinus, et en une série de Fourier en sinus. Étudier dans ce cas la validité de la « thèse de Fourier », c'est-à-dire examiner la convergence de la série de Fourier et comparer sa somme à la fonction considérée (le cas impair se ramène à XI (translater par π), et pour le cas pair on s'inspirera de XIV).

XVII (suite) Développer $x \mapsto x^2$ $(0 < x < \pi)$ en une série de Fourier en cosinus, et en une série de Fourier en sinus. Étudier la validité de la « thèse de Fourier ».

XVIII Déterminer la série de Fourier de la fonction 2π-périodique qui vaut 0 pour $0 < t < \pi - a$, 1 pour $\pi - a < t < \pi + a$, 0 pour $\pi + a < t < 2\pi$. La fonction est-elle bien reconstruite par sa série de Fourier ?

XIX Montrer $-|\sin(x/2)|^{-1} \leq D_n(x) \leq +|\sin(x/2)|^{-1}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout x. Voir la figure 1. (optionnel : pour tout x déterminer les valeurs de $\underline{\lim}\, D_n(x)$ et de $\overline{\lim}\, D_n(x)$.)

XX Montrer $0 \leq F_n(x) \leq +|\sin(x/2)|^{-1}$ pour tout $n \geq 1$ et tout x. Voir la figure 2. Pour tout x déterminer les valeurs de $\underline{\lim}\, F_n(x)$ et de $\overline{\lim}\, F_n(x)$.

4. on discutera plus tard du « phénomène de Gibbs » qui est lié à la non-uniformité de cette convergence.

FIG. 1 – Noyaux de Dirichlet D_1, D_2, D_4, et fonctions $\pm|\sin(x/2)|^{-1}$

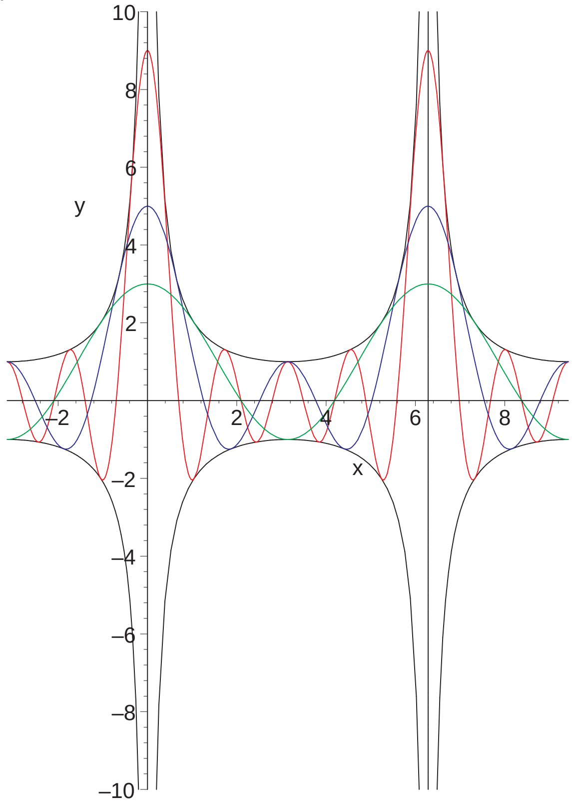

FIG. 2 – Noyaux de Fejér F_2, F_3, F_5, F_9 et fonctions $\pm|\sin(x/2)|^{-1}$