Université Lille 1 — Licence de Mathématiques (L3, 2006/07)
MATH 312 — Responsable: J.-F. Burnol

I (Coefficients de Fourier) On utilisera tout le temps la notation

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt\,,$$

pour $n \in \mathbf{Z}$ et f une fonction intégrable sur $[-\pi, +\pi]$, la plupart du temps tacitement considérée comme étant 2π-périodique [1]. De plus lorsque l'on écrit quelque chose du genre

$$f \sim \sum_{-\infty}^{\infty} d_n e^{int}\,,$$

tout ce que l'on veut dire par là c'est que $d_n = c_n(f)$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$, le symbole de sommation étant purement formel dans ce contexte. [2]

Soit I un intervalle quelconque de longueur 2π. Montrer $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_I f(t)e^{-int}dt$.

On utilisera toujours la notation
$$e_n(t) = e^{int}$$
de sorte que $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{e_n(t)}dt$. L'analogue du produit scalaire euclidien $\vec{x}\cdot\vec{y} = x_1y_1 + \cdots + x_ky_k$ pour des vecteurs complexes est $x_1\overline{y_1} + \cdots + x_k\overline{y_k}$. Par analogie, on définit donc pour les fonctions 2π-périodiques $(f, g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$. Ainsi $c_n(f) = (f, e_n)$, pour tout $n \in \mathbf{Z}$.

II On rappelle les notations usuelles $\begin{smallmatrix} a_n \\ b_n \end{smallmatrix}(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t) \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}(nt)dt$ (pour $n \in \mathbf{N}$). Faites bien attention au $\frac{1}{\pi}$ et non pas $\frac{1}{2\pi}$ devant l'intégrale. Exprimer les a_n et b_n $(n \geq 0)$ en fonction des c_m $(m \in \mathbf{Z})$ et réciproquement.

III (Relations d'« orthogonalité ») Soit I un intervalle de longueur 2π. Que valent $\int_I \cos(nt)\sin(mt)\frac{dt}{2\pi}$, $\int_I \cos(nt)\cos(mt)\frac{dt}{2\pi}$, $\int_I \sin(nt)\sin(mt)\frac{dt}{2\pi}$? Que valent les $\int_I e_n(t)\overline{e_m(t)}\frac{dt}{2\pi}$? et si la longueur $|I|$ de I n'est pas 2π ?

IV (Noyau [3] de Dirichlet) Prouver la formule suivante qui joue un rôle fondamental :

$$\begin{aligned}1 + 2\cos(x)\cos(y) + \cdots + 2\cos(Nx)\cos(Ny) + &\\ + 2\sin(x)\sin(y) + \cdots + 2\sin(Nx)\sin(Ny) &= \frac{\sin((N+\frac{1}{2})(x-y))}{\sin(\frac{1}{2}(x-y))}\end{aligned}$$

Le plus simple est sans doute d'utiliser les nombres complexes et/ou les formules de De Moivre (quoi qu'il en soit, donner une preuve par récurrence est moins élégant que de retrouver la

1. ce qui peut nécessiter de la redéfinir en π ou en $-\pi$.
2. Une bonne partie du début du Cours est consacré à voir quel sens donner à cette somme et à son égalité éventuelle avec f. Si cela n'est pas encore fait, je vous invite à revisiter d'urgence votre cours de deuxième année qui a déjà évoqué le sujet des séries de Fourier.
3. on appelle « noyau » une fonction $K(x, y)$ de deux variables, employée dans des formules du type $\psi(x) = \int K(x, y)\phi(y)dy$. Lorsque $K(x, y) = F(x-y)$ on parle de noyau de convolution (l'espace mesuré est alors supposé être un groupe additif muni d'une mesure invariante dy). Dans certains livres D_N est $\frac{1}{2}$ de notre D_N.

formule finale ex nihilo). On note $D_N(x) = 1 + 2\sum_{1\leq k\leq N}\cos(kx)$. Que vaut $D_N(0)$? Que vaut $\int_0^{2\pi} D_N(t)\frac{dt}{2\pi}$? Que valent les coefficients de Fourier réels et complexes de D_N ?

V (Noyau de Fejér) Le noyau de Fejér F_N est la moyenne arithmétique des N premiers noyaux de Dirichlet :

$$F_N(x) = \frac{D_0(x) + D_1(x) + \cdots + D_{N-1}(x)}{N}$$

Que valent les coefficients de Fourier réels et complexes de F_N ? Que vaut $F_N(0)$? Que vaut $\int_0^{2\pi} F_N(t)\frac{dt}{2\pi}$? Montrer la formule remarquable :

$$F_N(x) = \frac{\sin^2(\frac{Nx}{2})}{N\sin^2(\frac{x}{2})}$$

VI (séries de Fourier réelles et complexes) On parle souvent de « série de Fourier réelle » lorsque l'on utilise les cosinus et sinus et de « série de Fourier complexe » lorsque l'on utilise les exponentielles complexes. Mais une série de Fourier « réelle » a en fait des coefficients (qui peuvent être) complexes lorsque la fonction considérée est à valeurs complexes, et une série de Fourier « complexe » peut très bien n'avoir que des coefficients réels. Montrer :

1. une fonction à valeurs réelles a une série de Fourier en cos et sin à coefficients réels,
2. une fonction paire n'a que des cosinus dans sa série de Fourier ($b_n = 0$),
3. une fonction impaire n'a que des sinus dans sa série de Fourier ($a_n = 0$),
4. les coefficients c_n d'une fonction à valeurs réelles vérifient $c_{-n} = \overline{c_n}$,
5. les coefficients c_n d'une fonction paire vérifient $c_{-n} = c_n$,
6. les coefficients c_n d'une fonction impaire vérifient $c_{-n} = -c_n$.

VII Montrer que $\sum_{m\in\mathbf{Z}} |c_m(f)| < \infty$ équivaut à $\sum_{n\in\mathbf{N}}(|a_n(f)| + |b_n(f)|) < \infty$.

VIII On se donne a priori des nombres complexes a_n, b_n, $n \in \mathbf{N}$, et on suppose que la série $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt))$ converge pour tout t, uniformément sur l'intervalle $[0, 2\pi]$. Montrer que la somme $F(t)$ est une fonction continue sur $\mathbf{R}$, déterminer ses coefficients de Fourier $a_n(F)$, $b_n(F)$.

IX On se donne a priori des coefficients $d_m \in \mathbf{C}$, $m \in \mathbf{Z}$, vérifiant $\sum_{m\in\mathbf{Z}} |d_m| < \infty$, et on définit $F(t) = \sum_{m\in\mathbf{Z}} d_m e_m(t)$. Montrer que F est une fonction continue sur $\mathbf{R}$. Prouver $c_n(F) = d_n$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$.

X Quels sont, pour $u \in \mathbf{R}$ donné, les coefficients de Fourier a_n, b_n, c_n de la fonction $t \mapsto f(t + u)$ connaissant ceux de f ? Quels sont les coefficients de Fourier de $t \mapsto f(Nt)$, pour $N \in \mathbf{N}$?

Les exemples suivants de séries de Fourier sont tous dans le domaine d'application du théorème de Dirichlet ; l'idée est d'essayer de résoudre les exercices sans l'aide du théorème de Dirichlet, pour mieux l'apprécier, bien qu'il ne s'agisse là que du tout premier théorème de la théorie classique des séries de Fourier, dont la preuve figure dans les toutes premières pages (pour ne pas dire en note de bas de page...) des gros livres sur le sujet.

XI On considère la fonction 2π-périodique impaire f qui vaut $t - \pi$ sur $]0, \pi[$. Que vaut f sur $]\pi, 2\pi[$? que vaut f en les multiples de π ? Dessiner un graphe de f. Déterminer la série de

Fourier (« réelle » ou « complexe ») de la fonction f.

XII (suite) Soit w un nombre complexe de module 1, mais différent de -1. En majorant pour $0 \leq t < 1$ les restes dans la série de Taylor de $t \mapsto \frac{1}{1+tw}$ de ses sommes partielles, et en intégrant, montrer la validité de la formule $\mathrm{Log}(1+w) = w - \frac{1}{2}w^2 + \frac{1}{3}w^3 + \dots$. En déduire alors que la fonction f de l'exercice précédent est partout la somme de sa série de Fourier. (Rappel : soit AB un diamètre d'un cercle de centre C, soit M un point du cercle alors l'angle en A de BAM est la moitié de l'angle en C de BCM.)

XIII (suite ; sommation d'Abel et convergence uniforme) En utilisant la méthode de la sommation par parties (sommation d'Abel), prouver que la série de Fourier de la fonction f de l'exercice précédent est uniformément convergente sur tout intervalle $[\epsilon, 2\pi - \epsilon]$, $\pi > \epsilon > 0$. Il est aussi possible d'obtenir ce résultat en réexaminant nos majorations pour les restes dans la série de $\mathrm{Log}(1+w)$ pour $|w| = 1$. La série de Fourier de f est-elle uniformément convergente sur $[0, 2\pi]$? [4]

XIV (suite) On note $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, pour $0 \leq x < 2\pi$. Exhiber $F(x)$ dans cet intervalle comme la somme d'une certaine série de Fourier, en justifiant (considérer d'abord $\int_\epsilon^x$ puis $\epsilon \to 0$) la permutation de l'intégrale et de la somme infinie de sinus représentant f. Justifier sans autres calculs (utiliser l'exercice IX) que la série trigonométrique ainsi obtenue est bien donnée en fonction de F par les formules de Fourier. En particulier en calculant le zéro$^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier montrer $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$. Donner une autre preuve en calculant $F(\pi)$.

XV On considère une fonction 2π-périodique g qui vaut 1 sur $]0, \pi[$ et 0 sur $]\pi, 2\pi[$. Déterminer sa série de Fourier. On note $S_N(t)$ la somme partielle (jusqu'à $a_N \cos(Nt) + b_N \sin(Nt)$ inclus). Comment faut-il définir $g(0)$ et $g(\pi)$ pour qu'en ces points l'on ait $g(t) = \lim\ S_N(t)$? Prouver que l'on a $g(t) = \lim\ S_N(t)$ pour tout t avec convergence uniforme si l'on exclut un voisinage des points de discontinuité de g (indication pour cette question : examiner $f(t+\pi) - f(t)$ avec le f de XI).

XVI (suite) Développer $x \mapsto x$ $(0 < x < \pi)$ en une série de Fourier en cosinus, et en une série de Fourier en sinus. Étudier dans ce cas la validité de la « thèse de Fourier », c'est-à-dire examiner la convergence de la série de Fourier et comparer sa somme à la fonction considérée (le cas impair se ramène à XI (translater par π), et pour le cas pair on s'inspirera de XIV).

XVII (suite) Développer $x \mapsto x^2$ $(0 < x < \pi)$ en une série de Fourier en cosinus, et en une série de Fourier en sinus. Étudier la validité de la « thèse de Fourier ».

XVIII Déterminer la série de Fourier de la fonction 2π-périodique qui vaut 0 pour $0 < t < \pi - a$, 1 pour $\pi - a < t < \pi + a$, 0 pour $\pi + a < t < 2\pi$. La fonction est-elle bien reconstruite par sa série de Fourier ?

XIX Montrer $-|\sin(x/2)|^{-1} \leq D_n(x) \leq +|\sin(x/2)|^{-1}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout x. Voir la figure 1. (optionnel : pour tout x déterminer les valeurs de $\underline{\lim}\, D_n(x)$ et de $\overline{\lim}\, D_n(x)$.)

XX Montrer $0 \leq F_n(x) \leq +|\sin(x/2)|^{-1}$ pour tout $n \geq 1$ et tout x. Voir la figure 2. Pour tout x déterminer les valeurs de $\underline{\lim}\, F_n(x)$ et de $\overline{\lim}\, F_n(x)$.

4. on discutera plus tard du « phénomène de Gibbs » qui est lié à la non-uniformité de cette convergence.

Fig. 1 – Noyaux de Dirichlet D_1, D_2, D_4, et fonctions $\pm|\sin(x/2)|^{-1}$

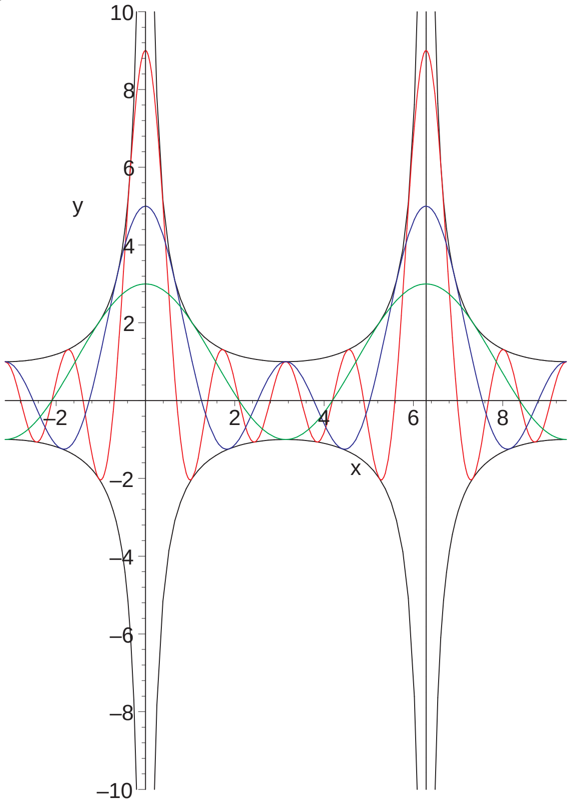
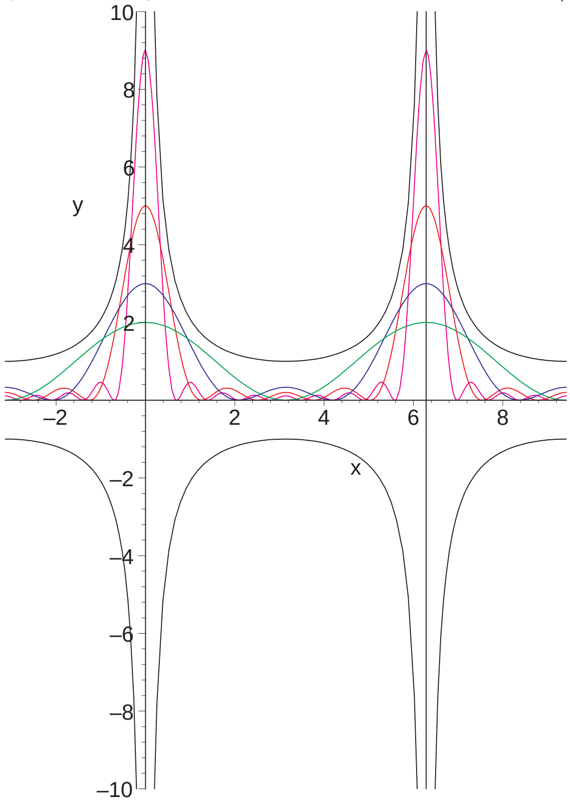


Fig. 2 – Noyaux de Fejér F_2, F_3, F_5, F_9 et fonctions $\pm|\sin(x/2)|^{-1}$



XXI (Riemann-intégrabilité) En utilisant la définition donnée en cours de l'intégrabilité au sens de Riemann d'une fonction f (que l'on prendra à valeurs réelles, le cas à valeurs complexes s'y ramenant en séparant parties réelles et imaginaires) sur un intervalle $[a, b]$ borné, re-donner les démonstrations vues en premier cycle (soit en cours, soit dans les livres sur lesquels vous aurez travaillé, à la bibliothèque, ou chez vous) de la R-intégrabilité des fonctions monotones et aussi des fonctions continues. Pour ces dernières vous ferez la démonstration en utilisant la continuité uniforme. Cet exercice est typiquement quelque chose à propos de quoi je vais donner des consignes à mes collègues en TD de ne pas s'attarder plus de dix minutes. Car on ne va pas non plus rabâcher quinze fois les programmes antérieurs. Alors soit vous aurez travaillé chez vous dessus et les indications pendant les travaux dirigés serviront juste à vous rassurer, soit vous n'aurez rien fait et alors vous aurez pris vos responsabilités. Même consigne pour les trois exercices qui suivent.

XXII (suite) Soit U une fonction en escalier, à valeurs réelles, sur $[a, b]$, et $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ une subdivision adaptée, avec les valeurs successives α_j sur $]x_j, x_{j+1}[$. Les valeurs prises aux points x_j ne sont pas importantes et resteront non spécifiées. Aussi on supposera $N \geq 2$. Soit $\eta = \min(x_{j+1} - x_j, 0 \leq j < N)$ et soit $\delta > 0$ et $< \frac{1}{2}\eta$. Soit g la fonction continue affine par morceaux obtenue à partir de U en posant $g = U$ en dehors des intervalles $]x_j - \delta, x_j + \delta[$ $(1 \leq j < N)$ et interpolant linéairement dans ces intervalles. Bien sûr $g(a)$ et $g(b)$ sont respectivement α_0 et α_{N-1} de sorte que g est continue sur $[a, b]$. Quelle est la valeur exacte de $\int_a^b |U(t) - g(t)|\,dt$? En déduire qu'elle tend vers zéro avec δ. En déduire que pour toute fonction R-intégrable et tout $\epsilon > 0$ il existe une fonction g continue sur $[a, b]$ avec $\int_a^b |f(t) - g(t)|\,dt \leq \epsilon$.

XXIII Comme je l'ai rappelé en cours, presque directement comme conséquence de la définition de la R-intégrabilité, si f (à valeurs complexes) l'est sur $[a, b]$, et si $\epsilon > 0$ est donné, alors il existe U en escalier avec $\int_a^b |f(t) - U(t)|\,dt \leq \epsilon$. Montrer que quitte à modifier U on peut imposer de plus $\sup_{[a,b]} |U(t)| \leq C = \sup_{[a,b]} |f(t)|$. Indication : soit $(x_i)_{0 \leq i \leq N}$ une subdivision adaptée à U, soit α_i la valeur prise sur $]x_i, x_{i+1}[$. Si $|\alpha_i| > C$ remplacez le par $\beta_i = C\alpha_i/|\alpha_i|$.

XXIV Soit f, à valeurs complexe, R-intégrable sur $[a, b]$, soit $\epsilon > 0$ et soit g continue sur $[a, b]$ avec $\int_a^b |f(t) - g(t)|\,dt \leq \epsilon$. Soit $C = \sup |f|$, montrer qu'il existe k continue vérifiant $\int_a^b |f(t) - k(t)|\,dt \leq \epsilon$, et aussi $\sup |k| \leq C$. Indications : si f est identiquement nulle c'est trivial donc on peut supposer $C > 0$. Soit $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ la fonction définie par $F(z) = z$ si $|z| \leq C$ et $F(z) = Cz/|z|$ si $|z| > C$. Montrer que F est une fonction continue sur $\mathbf{C}$. Montrer que la fonction $k(t) = F(g(t))$ est une fonction continue qui convient.

XXV («continuité des translations») Voici un exercice portant sur un point très important. Soit f R-intégrable sur $[a, b]$. On pose $f(t) = 0$ si $t < a$ ou si $t > b$. En utilisant l'approximation par des fonctions en escalier, montrer :

$$\lim_{h \to 0} \int_a^b |f(t + h) - f(t)|\,dt = 0$$

Comme je l'expliquerai en cours, l'approximation par une (mais **pas l'encadrement par deux**) fonction en escalier vaut aussi pour les fonctions intégrables au sens de Lebesgue. Donc le résultat ci-dessus vaut en toute généralité : c'est une chose d'importance majeure. En fait on a ici quelque chose qui est plus du cours qu'un exercice : mais vous savez bien que le meilleur exercice c'est le cours ; regardez vos notes de cours et à chaque fois que vous voyez une démonstration essayez de la retrouver par vous-même. Si vous faites cela tout sera facile. Faites aussi la variante où l'on a des fonctions 2π-périodiques, et $a = 0$ et $b = 2\pi$.

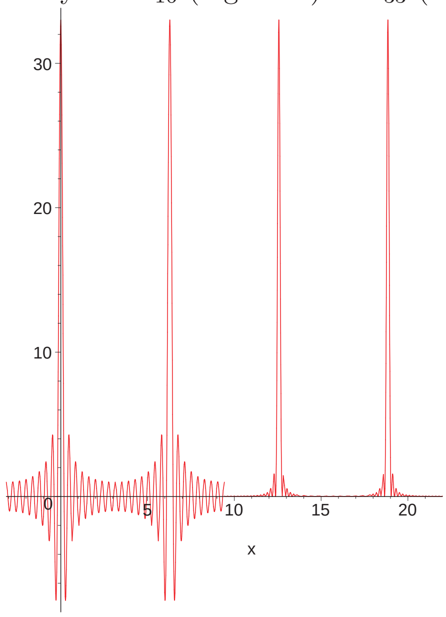
XXVI (la convolution régularise) Dans cet exercice on utilisera l'intégrale de Lebesgue, le théorème de la convergence dominée et le critère que l'on en déduit de dérivabilité des intégrales à paramètres. On suppose que f et g sont 2π-périodiques, intégrables.[5] Justifier que $f * g$ est continue dès que f l'est.[6] Montrer que $f * g$ est de classe C^k si f l'est. Montrer que $f * g$ est de classe C^{k+q} si f est de classe C^k et si g est de classe C^q.

Dorénavant et sauf précision du contraire, on ne se limite plus aux fonctions intégrables au sens de Riemann, on utilise la théorie de Lebesgue, et surtout les théorèmes associés.

XXVII En utilisant le théorème d'unicité caractériser sur les coefficients de Fourier $c_n(f)$, respectivement $a_n(f)$ et $b_n(f)$ le fait pour f d'être : à valeurs réelles, d'être paire, impaire, à valeurs réelles et paire, à valeurs réelles et impaire. Comme ici f n'est définie qu'à l'équivalence presque partout près, préciser ce que cela signifie exactement.

XXVIII (convolution et coefficients de Fourier) Rappelons la notation $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_I f(t)e^{-int}dt$, pour $n \in \mathbf{Z}$ et f une fontion 2π-périodique et intégrable (sur une période), et I un intervalle quelconque de longueur 2π. En utilisant le théorème de Fubini prouver $c_n(f_1 * f_2) = c_n(f_1)c_n(f_2)$. On note e_n la fonction e^{inx}. Quelle est la fonction $e_n * f$? On rappelle les notations usuelles $\substack{a_n \\ b_n}(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t) \substack{\cos \\ \sin}(nt)dt$. Quelles sont les fonctions $\cos(n\,\cdot\,) * f$ et $\sin(n\,\cdot\,) * f$?

FIG. 3 – Noyaux D_{16} (à gauche) et F_{33} (à droite)



5. lorsque l'on dit d'une fonction qu'elle est « intégrable » on fait référence à l'intégrale de Lebesgue ; si l'on veut se restreindre à l'intégrale de Riemann on dit R-intégrable.

6. en fait $f * g$ est continue dès que soit f soit g est bornée. Vous pourrez déduire cela de la validité du théorème de «continuité des translations» XXV pour les fonctions L-intégrables.

XXIX (Approximations de l'identité) Sur la base de la figure 3 faites l'éloge de Fejér. On dira que des fonctions 2π-périodiques $K_n(x)$ (définies disons pour $n \geq 1$) forment (dans le cadre des fonctions 2π-périodiques) une « approximation de l'identité » si :

1. $\forall n \geq 1 \quad \int_{-\pi}^{+\pi} K_n(t) \frac{dt}{2\pi} = 1$,
2. il existe une constante C avec $\forall n \geq 1 \quad \int_{-\pi}^{+\pi} |K_n(t)| \frac{dt}{2\pi} \leq C$,
3. et pour tout $0 < \delta < \pi$ on a $K_n \overset{[-\pi,+\pi]\setminus]-\delta,+\delta[}{\Longrightarrow} 0$

Montrer (en reprenant la démonstration donnée en cours) que si $(K_n)_{n\geq 1}$ est une approximation de l'identité et f une fonction 2π-périodique (L-intégrable), alors on a $K_n * f(x) \to f(x)$ en tout point de continuité x de f.[7]

XXX (suite) Donner un exemple d'approximation de l'identité avec de plus la propriété que $K_n(t) = 0$ pour $-\pi \leq t \leq 0$. Montrer dans ce cas que $\lim(K_n * f)(x_0) = f(x_0^-)$ pour toute fonction f (intégrable) et tout point où $f(x_0^-)$ existe (bien sûr lorsque f est continue au point x_0 on retrouve la résultat précédent).

XXXI (suite) Donner un exemple d'approximation de l'identité avec $\lim \int_0^{+\pi} K_n(t) \frac{dt}{2\pi} = \frac{3}{5}$. Pour une fonction f et un point x_0 où $f(x_0^+)$ et $f(x_0^-)$ existent, que vaut $\lim(K_n * f)(x_0)$?

XXXII (Riemann-Lebesgue pour les fonctions C^1) On suppose que f est une fonction de classe C^1 sur un intervalle ouvert I. Soit $[a, b] \subset I$; montrer qu'il existe une constante $C = C(f, a, b)$ telle que $|\int_a^b \cos(\lambda x) f(x) dx| \leq \frac{C}{\lambda}$ et $|\int_a^b \sin(\lambda x) f(x) dx| \leq \frac{C}{\lambda}$ pour $\lambda \geq 1$. On donnera une expression explicite pour une constante C qui marche.

XXXIII (Riemann-Lebesgue (suite)) Soit f intégrable sur $\mathbf{R}$ et soit ϕ de classe C^1 à support compact. Montrer en utilisant l'exercice précédent $\overline{\lim}_{\lambda\to+\infty} |\int_{\mathbf{R}} {}^{\cos}_{\sin}(\lambda x) f(x) dx| \leq \int_{\mathbf{R}} |f(t) - \phi(t)| dt$. En déduire (Lemme de Riemann-Lebesgue)

$$\overline{\lim_{\lambda\to+\infty}} \left| \int_{\mathbf{R}} {}^{\cos}_{\sin}(\lambda x) f(x) dx \right| = 0$$

en admettant que les fonctions C^1 à support compact forment une partie dense de $L^1(\mathbf{R})$. Prouver que c'est le cas en admettant que les fonctions en escalier[8] sont denses dans $L^1(\mathbf{R})$.

XXXIV (suite) Soit f intégrable sur $\mathbf{R}$.

1. Montrer astucieusement $|\int_{\mathbf{R}} e^{i\lambda x} f(x) dx| \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} |f(x + \frac{\pi}{\lambda}) - f(x)| dx$,
2. et par ailleurs montrer pour toute fonction U en escalier (à support compact, c'est-à-dire U intégrable) : $\overline{\lim}_{h\to 0} \int_{\mathbf{R}} |f(x + h) - f(x)| dx \leq 2 \int_{\mathbf{R}} |f(t) - U(t)| dt$.

Prouver à nouveau le Lemme de Riemann-Lebesgue en admettant la densité au sens L^1 des fonctions en escalier.

XXXV (Problème) Rapppel : $\sum_{0\leq j<n} j = 1 + \cdots + (n - 1) = \frac{(n-1)n}{2}$ et $\sum_{0\leq j<n} j^2 = \frac{n(2n^2-3n+1)}{6}$.

1. Exprimer $D_n(x)$ en fonction des $\cos(kx)$, $0 \leq k \leq n$, et justifier les inégalités $D_n(x) \leq$

7. Attention, dans les feuilles d'exercices de l'année précédente la notion d'«approximation de l'identité» était définie un peu différemment.

8. ne pas confondre « en escalier » qui fait intervenir des intervalles et « étagé » qui fait intervenir des parties mesurables générales.

$D_n(0)$ et $0 \leq F_n(x) \leq F_n(0)$.

2. Montrer $0 \leq F_N(x) \leq \min(N, \frac{1}{N}\frac{\pi^2}{x^2})$ pour tout $x \in]0,\pi]$ et tout $N \geq 1$.

3. On considère un polynôme trigonométrique $P(x)$ du type $\sum_{0\leq k\leq N} v_k \cos(kx)$. Reprouver $\int_{-\pi}^{\pi} P^2(x)\frac{dx}{2\pi} = v_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{1\leq k\leq N} v_k^2$.

4. Que valent les v_k dans l'expression $F_N(x) = \sum_{0\leq k\leq N} v_k \cos(kx)$? (ils dépendent aussi de N)

5. On note $\lambda_N = \int_{-\pi}^{\pi} F_N^2(x)\frac{dx}{2\pi}$. Prouver $\lambda_N = \frac{2}{3}N + \frac{1}{3}\frac{1}{N}$.

6. On pose $K_N(x) = \frac{1}{\lambda_N}F_N^2(x)$. Que vaut $\int_{-\pi}^{\pi} K_N(x)\frac{dx}{2\pi}$? Prouver pour tout $x \in]0,\pi]$ et tout $N \geq 1$:

$$0 \leq K_N(x) \leq \min(\frac{3}{2}N, \frac{3}{2N^3}\frac{\pi^4}{x^4})$$

7. Prouver (on considérera séparément $0 \leq x \leq \frac{\pi}{N}$ et $\frac{\pi}{N} \leq x \leq \pi$) :

$$0 \leq \int_{-\pi}^{\pi} K_N(x)|x|\frac{dx}{2\pi} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} K_N(x)x\,dx \leq \frac{3\pi}{2N}$$

8. On rappelle que l'on dit d'une fonction f qu'elle est Λ-Lipschitzienne si $\forall u,v\ |f(u) - f(v)| \leq \Lambda|u-v|$. Soit f une fonction 2π-périodique et Λ-Lipschitzienne. Montrer :

$$\forall N \geq 1 \qquad |(K_N * f)(0) - f(0)| \leq \frac{3\pi\Lambda}{2N}$$

9. Soit f une fonction 2π-périodique de classe C^1. Montrer :

$$\forall N \geq 1\ \forall x \qquad |(K_N * f)(x) - f(x)| \leq \frac{3\pi \sup|f'|}{2N}$$

10. Soit f une fonction 2π-périodique de classe C^1. En utilisant le résultat précédent, montrer[9] :

$$\|D_N * f - f\|_2 = \mathcal{O}(\frac{1}{N})$$

11. Donner une autre preuve, qui n'utilise pas les résultats précédents, de $\|D_N * f - f\|_2 = \mathcal{O}(\frac{1}{N})$ pour f 2π-périodique et de classe C^1. Montrer d'ailleurs par cette autre preuve le résultat plus fin $\|D_N * f - f\|_2 = o(\frac{1}{N})$.

12. Soit f une fonction 2π-périodique de classe C^1. Montrer :

$$\sup_{0\leq x\leq 2\pi} |F_N * f(x) - f(x)| = \mathcal{O}(\frac{\log N}{N}) .$$

On n'aura pas besoin des résultats précédents, mais il s'agit d'adapter aux noyaux de Fejér F_N la méthode suivie ici pour les noyaux (de Jackson) K_N.

9. il s'agit bien de D_N et non pas K_N dans la formule. On rappelle que $u_n = \mathcal{O}(\frac{1}{n})$ signifie $\exists C\ \forall n \geq 1\ |u_n| \leq \frac{C}{n}$. Et $\|g\|_2 = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 \frac{dx}{2\pi}}$.

XXXVI (Encore Riemann !) Je ne voudrais surtout pas donner l'impression que l'examen portera sur des questions d'intégrale de Riemann, certainement pas. Mais je dois m'assurer que vous connaissez l'Analyse des années antérieures. Alors je vous demande de prouver que lorsque f est R-intégrable sur $[a,b]$ alors la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est une fonction continue sur $[a,b]$. Je rappelle, mais c'est tout à fait autre chose, que si x_0 est un point de continuité de f alors il est un point de dérivabilité de F avec $F'(x_0) = f(x_0)$.

XXXVII (Enfin Lebesgue !) On reprend l'exercice précédent, mais on suppose seulement que f est Lebesgue-intégrable. Il s'agit à nouveau de montrer la continuité de $x \mapsto F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Montrer-le lorsque f est bornée (si vous vous êtes bien débrouillé(e) dans l'exercice précédent c'est l'unique propriété de f que vous y aurez utilisé). Revenons au cas général. Pour chaque n entier ≥ 1, soit $f_n(x) = f(x)$ si $|f(x)| \leq n$, et $= 0$ si $|f(x)| > n$. On pose $F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\,dt$. On pose $r_n = \int_{\{|f(t)|>n\}} |f(t)|\,dt = \int_a^b \mathbf{1}_{\{|f(t)|>n\}}(t)|f(t)|\,dt$. En utilisant le théorème de la convergence monotone, montrer $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$. En déduire $F_n \rightrightarrows F$ sur $[a,b]$. Montrer que les F_n sont continues et en déduire que F est continue. Si vous le voulez, donnez une toute autre démonstration, sans passer par les f_n, par exemple en utilisant le théorème de la convergence dominée.[10]

XXXVIII (convolution de fonctions intégrables) On considère deux fonctions f et g sur $\mathbf{R}$ (à valeurs complexes éventuellement). On suppose f et g intégrables. Par quel(s) théorème(s) du cours d'intégration justifiez-vous l'existence de la fonction $k(x) = \int_{\mathbf{R}} f(x-t)g(t)dt$? La fonction k est-elle a priori définie pour <u>tout</u> x ? Et si f ou g est bornée ? Et si f et g sont à valeurs positives ? On note $k = f * g$. Montrer $k = g * f$. Montrer que k est intégrable. Que vaut $\int_{\mathbf{R}} k(x)dx$? Montrer $f_1 * (f_2 * f_3) = (f_1 * f_2) * f_3$.

XXXIX (convolution de fonctions périodiques) On suppose que f et g sont toutes deux T-périodiques, intégrables sur $[0,T]$, et l'on définit $k(x) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x-t)g(t)dt$. Par quel(s) théorème(s) justifiez-vous l'existence de la fonction k ? La fonction k est-elle a priori <u>partout</u> définie ? Donner des cas où elle l'est. Montrer $k(x) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x-t)g(t)dt$. Montrer que k est T-périodique. On utlise à nouveau la notation à nouveau $k = f*g$[11]. Que vaut $\frac{1}{T}\int_0^T (f*g)(x)dx$? Prouver $f_1 * (f_2 * f_3) = (f_1 * f_2) * f_3$.

XL (Cesàro) Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle ou complexe. Soit $v_n = \frac{u_0+\cdots+u_{n-1}}{n}$. On suppose $\lim u_n = L$, montrer $\lim v_n = L$.

XLI (suite) Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle et $v_n = \frac{u_0+\cdots+u_{n-1}}{n}$. Montrer :

$$\underline{\lim}\, u_n \leq \underline{\lim}\, v_n \leq \overline{\lim}\, v_n \leq \overline{\lim}\, u_n$$

et en déduire à nouveau le théorème de Cesàro de l'exercice précédent.

10. à propos, si x_0 est un point de continuité de f alors, comme pour les fonctions R-intégrables, $F'(x_0)$ existe et vaut $f(x_0)$. Bien qu'une fonction L-intégrable puisse n'avoir aucun point de continuité, Lebesgue a démontré (c'est très difficile) qu'en toute généralité F est toujours presque partout dérivable avec $F' = f$ p.p.

11. on notera que la fonction périodique g ne peut être intégrable sur $\mathbf{R}$ tout entier que si elle est nulle, donc il ne peut pas y avoir de conflit avec l'exercice précédent.

Je rappelle les notations $\mathcal{O}$ et o : par exemple écrire $c_n = \mathcal{O}(\frac{1}{n})$ c'est dire qu'il existe une constante K telle que $|c_n| \leq \frac{K}{n}$ (pour $n \geq 1$, ou pour tout n suffisamment grand ce qui revient au même quitte à changer K).

XLII (Cesàro pour les séries ; Théorème taubérien faible) On se donne une série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ de nombres réels ou complexes. On note $s_n = x_0 + \cdots + x_n$ et pour $n \geq 1$:

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1}}{n}$$

Exprimer les σ_n en fonction des x_m. On dit que la série a la Cesàro-somme L si $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = L$. Montrer :

$$s_n - \sigma_n = \frac{1x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n}{n}$$

En déduire : si la série a L comme Cesàro somme et si $x_n = o(\frac{1}{n})$ alors la série converge vers L.

XLIII Montrer que pour une série à termes positifs la Cesàro-convergence équivaut à la convergence tout court (si vous êtes fainéant ou savant, vous n'aurez qu'à invoquer le théorème de la convergence monotone dans un contexte approprié ; mais ça ne fait pas de mal non plus de donner une démonstration directe).

XLIV (Théorème taubérien de Hardy) On reprend l'exercice XLII. On va montrer que l'on a la même conclusion en supposant seulement $x_n = \mathcal{O}(\frac{1}{n})$. En supposant $|x_j| \leq \frac{K}{j}$ pour $j \geq 1$ établir

$$n < m \implies \left| \frac{s_n + \cdots + s_{m-1}}{m-n} - s_n \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{m-1} \frac{m-k}{m-n} x_k \right| \leq K \sum_{k=n+1}^{m-1} \frac{1}{k} \leq K \log \frac{m-1}{n} \,.$$

Prouver ensuite $\frac{s_n + \cdots + s_{m-1}}{m-n} = \frac{\sigma_m - \frac{n}{m}\sigma_n}{1 - \frac{n}{m}}$ puis en déduire : [12]

$$\forall \Lambda > 1 \ \forall n \geq 1 \qquad |s_n - L| \leq \frac{\Lambda}{\Lambda - 1} \left(|\sigma_n - L| + |\sigma_{[\Lambda n]+1} - L| \right) + K \log \Lambda \,.$$

Conclure. Ce renforcement du théorème très facile établi dans l'exercice XLII est dû à Hardy. [13]

XLV (Application aux séries de Fourier) Soit f une fonction 2π-périodique dont les coefficients de Fourier $c_n(f)$ sont $\mathcal{O}(\frac{1}{|n|})$. Montrer $\lim\ S_N(f)(x) = f(x)$ en tout point de continuité de f et plus généralement $\lim_{N\to\infty} S_N(f)(x) = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$ si $f(x^+)$ et $f(x^-)$ existent.

XLVI (Fonctions monotones) Soit f croissante sur l'intervalle $[a, b]$. On pose $f(t) = 0$ pour $t > b$ et $t < a$. Soit $n \in \mathbf{N}$, suffisamment grand (on prendra $n \geq 2\frac{\pi}{b-a} + 1$). Montrer

12. on note $[x]$ la partie entière du nombre réel x

13. Tauber avait montré le théorème suivant : si les a_n sont $o(n^{-1})$ et si $\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = L$ alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge et vaut L (dans le sens inverse et sans hypothèse sur les a_n c'était un célèbre résultat d'Abel). Remarquez l'analogie entre les sommes $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $(x < 1)$ et les sommes $C(N) = \sum_{n=0}^{N} (1 - \frac{n}{N}) a_n$. À propos on peut d'ailleurs montrer que si $\lim C(N) = L$ existe alors $\lim_{x\to 1^-} A(x)$ existe aussi et vaut L (théorème de Frobenius qui est donc un renforcement du théorème d'Abel). Pour les $C(N)$ donc, Hardy a montré que sous l'hypothèse $a_n = \mathcal{O}(n^{-1})$, $\lim C(N) = L \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n = L$. C'est Littlewood qui a prouvé que le théorème initialement prouvé par Tauber pour $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ valait sous l'hypothèse $a_n = \mathcal{O}(n^{-1})$. Compte tenu du résultat de Frobenius, le théorème de Littlewood implique celui de Hardy. Il est nettement plus difficile à prouver.

$\int_a^b f(t)e^{int}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(f(t) - f(t+\frac{\pi}{n}))e^{int}\,dt$ puis en déduire

$$2\left|\int_a^b f(t)e^{int}\,dt\right| \leq \frac{\pi}{n}\sup|f| + \int_a^{b-\frac{\pi}{n}}(f(t+\frac{\pi}{n}) - f(t))\,dt + \frac{\pi}{n}\sup|f| \leq 4\frac{\pi}{n}\sup|f|$$

En déduire que les coefficients de Fourier d'une fonction monotone par morceaux sont $\mathcal{O}(\frac{1}{|n|})$. En déduire en utilisant les résultats précédents que la série de Fourier d'une fonction f monotone par morceaux est partout convergente de limite au point x égale à $\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$ (c'est là le vrai Théorème de Dirichlet, que celui-ci a prouvé par une méthode plus directe, complètement différente).

XLVII Si f est continue, et si ses coefficients de Fourier sont $\mathcal{O}(\frac{1}{|n|})$, montrer (en utilisant l'inégalité de l'exercice XLIV) que sa série de Fourier converge uniformément vers f.

XLVIII (suite) Montrer qu'une fonction continue et de classe C^1 par morceaux a des coefficients de Fourier qui sont $\mathcal{O}(\frac{1}{|n|})$. Conclure que sa série de Fourier converge uniformément.[14]

XLIX (Fonctions Lipschitziennes) Soit f (2π-périodique) telle qu'il existe une constante Λ avec $|f(u) - f(v)| \leq \Lambda|u - v|$ (condition de Lipschitz). Bien sûr, f est nécessairement continue. Montrer $c_n(f) = \mathcal{O}(\frac{1}{|n|})$. Ind. : calculer $\int_0^{2\pi} e^{-inx}f(x+\frac{\pi}{n})dx$. En déduire par un exercice précédent que la série de Fourier de f est uniformément convergente.[15]

L (Sommation d'Abel-Dirichlet) Montrer $\sum_{0\leq k\leq n} u_k v_k = \sum_{0\leq j\leq n} S_j(v_j - v_{j+1}) + S_n v_{n+1}$ avec $S_j = u_0 + \cdots + u_j$. En déduire que si les S_j sont bornées et si $\sum|v_j - v_{j+1}| < \infty$ et $\lim v_j = 0$ alors la série de terme général $u_k v_k$ est convergente, et

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k v_k = \sum_{j=0}^{\infty} S_j(v_j - v_{j+1})$$

Montrer de plus : $\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k v_k\right| \leq \sup_{k>n}|S_k - S_n|\sum_{k=n+1}^{\infty}|v_k - v_{k+1}|$ et en déduire le Test de Dirichlet : si les S_j sont bornées et si les v_j forment une suite décroissant vers 0 alors la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k v_k$ converge et $\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k v_k\right| \leq v_{n+1}\sup_{k>n}|S_k - S_n| \leq 2\,v_{n+1}\sup_{j\geq 0}|S_j|$.

LI Soit $0 < a < b < 2\pi$, et soit $f = \mathbf{1}_{]a,b[}$. Montrer que $S_N(f)(t)$ peut se mettre sous la forme :

$$S_N(f)(t) = \frac{b-a}{2\pi} + \sum_{n=1}^{N}\frac{\sin(n(t-a)) - \sin(n(t-b))}{\pi n}$$

En utilisant alors la sommation d'Abel-Dirichlet (c'est-à-dire l'exercice L), montrer

$$\left|\mathbf{1}_{]a,b[}(t) - S_N(f)(t)\right| \leq \frac{1}{(N+1)\pi}\left(\frac{1}{|\sin(\frac{t-a}{2})|} + \frac{1}{|\sin(\frac{t-b}{2})|}\right)$$

En déduire que si ϕ est une fonction en escalier alors sa série de Fourier converge uniformément sur tout intervalle fermé inclus dans un intervalle ouvert sur lequel ϕ est constante.

LII (suite) Soit F une fonction intégrable qui est identiquement nulle sur un intervalle ouvert $]u,v[$. Montrer que les sommes partielles $D_N * F$ de sa série de Fourier converge uniformément vers zéro sur tout sous intervalle fermé $[u',v'] \subset]u,v[$. On remarquera qu'il existe

14. on montrera dans un autre exercice qu'en fait $\sum_{n\in\mathbf{Z}}|c_n(f)| < \infty$ dans ce cas.

15. Remarque : on peut prouver nettement mieux, à savoir $\sum_{n\in\mathbf{Z}}|c_n(f)| < \infty$ (théorème de Bernstein). Donc la série de Fourier est en fait normalement convergente.

K avec $|D_N(x-t)| \leq K$ pour tout N, tout $x \in [u',v']$ et tout $t \notin]u,v[$. Pour tout $\epsilon > 0$ on choisira ϕ en escalier, identiquement nulle sur $]u,v[$ et avec $\|F-\phi\|_1 \leq \epsilon$; puis on utilisera l'exercice précédent. Soit plus généralement une fonction F intégrable et qui est de classe C^1 sur l'intervalle ouvert $]u,v[$. Montrer que sa série de Fourier converge uniformément sur tout sous-intervalle fermé $[u',v'] \subset]u,v[$.

LIII En appliquant l'identité de Parseval à la fonction $\mathbf{1}_{]\pi-a,\pi+a[}$ pour $0 < a < \pi$, établir :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin^2(na)}{n^2} = \frac{a(\pi-a)}{2}$$

Obtenir une formule équivalente en développant en série de Fourier la fonction 2π-périodique (paire) qui vaut $x(2\pi - x)$ pour $0 < x < 2\pi$.

LIV (forme bilinéaire de l'identité de Parseval) Soit f et g 2π-périodiques de carrés intégrables. Montrer :

$$\int_X f(t)\overline{g(t)}\frac{dt}{2\pi} = \sum_{m\in\mathbf{Z}} c_m(f)\overline{c_m(g)} = \frac{a_0(f)\overline{a_0(g)}}{4} + \sum_{n\geq 1} \frac{a_n(f)\overline{a_n(g)} + b_n(f)\overline{b_n(g)}}{2} ,$$

$$\int_X f(t)g(t)\frac{dt}{2\pi} = \sum_{m\in\mathbf{Z}} c_m(f)c_{-m}(g) = \frac{a_0(f)a_0(g)}{4} + \sum_{n\geq 1} \frac{a_n(f)a_n(g) + b_n(f)b_n(g)}{2} ,$$

avec des séries absolument convergentes (ce qui autorise les notations $m \in \mathbf{Z}$, ou $n \geq 1$).

LV (Fonctions de classe C^1) Montrer $\sum_{n\in\mathbf{Z}} |c_n(f)| < \infty$ pour toute fonction f continue 2π-périodique et de classe C^1 par morceaux. (Ind. : que vaut $c_n(f')$? utiliser l'inégalité de Bessel pour f' et l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $l^2(\mathbf{Z})$ pour majorer $\sum_{1\leq |n|} |c_n(f)|$ en fonction de $\|f'\|_2$). En déduire que la série de Fourier d'une fonction f continue et de classe C^1 par morceaux est normalement convergente (vers f).

LVI (suite) En reprenant la preuve de l'exercice précédent prouver $\sum_{|n|\geq 1} |n|^a |c_n(f)| < \infty$ pour tout $a < \frac{1}{2}$. Prouver même $\sum_{|n|\geq 2} \frac{\sqrt{|n|}|c_n(f)|}{\log |n|} < \infty$. En déduire que pour tout $\epsilon > 0$ il existe une infinité de $n > 0$ tels que $|c_n(f)| \leq \epsilon \frac{1}{n\sqrt{n}}$. Montrer par ailleurs $c_n(f) = o(\frac{1}{|n|})$.

LVII (suite) Montrer $c_n(f) = o(\frac{1}{n^2})$ et $\sum_{n\in\mathbf{Z}} |n|^{5/4}|c_n(f)| < \infty$ pour toute fonction f de classe C^2 et 2π-périodique.

LVIII (au-delà de Parseval) Soient f, g, k, trois fonctions dont la série de Fourier « complexe » est absolument convergente (par exemple des fonctions de classe C^1). Montrer :

$$\int_X f(t)g(t)k(t)\frac{dt}{2\pi} = \sum_{\substack{m_1,m_2,m_3\in\mathbf{Z}\\ m_1+m_2+m_3=0}} c_{m_1}(f)c_{m_2}(g)c_{m_3}(k)$$

avec une somme absolument convergente. À propos le théorème de Fubini dans le cas particulier de l'espace mesuré $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$, c'est quoi ?

LIX Déterminer les séries de Fourier des fonctions « triangles » c'est-à-dire des fonctions dont le graphe forme, essentiellement, un triangle.

LX Donner un exemple de fonction qui ne soit pas continue par morceaux. Donner un exemple de fonction non monotone par morceaux. Donner en fait un exemple de fonction ni continue par morceaux ni monotone par morceaux. Donner un exemple de fonction monotone mais non continue par morceaux. À propos montrer qu'une fonction monotone par morceaux a au plus un nombre dénombrable de discontinuités. Donner un exemple de fonction continue qui ne soit pas monotone par morceaux. D'une fonction continue mais non C^1 par morceaux. D'une fonction C^1 par morceaux mais non C^2 par morceaux. D'une fonction continue et C^∞ par morceaux mais non de classe C^∞... [16]... Donner un exemple d'une fonction mesurable mais non intégrable. D'une fonction intégrable mais non de carré intégrable. D'une fonction de carré intégrable mais non intégrable. D'une fonction continue non bornée. D'une fonction continue non uniformément continue. D'une fonction nulle part continue. Donner un exemple d'une fonction bornée non intégrable au sens de Riemann.

LXI On sait qu'une fonction C^2 a des coefficients de Fourier qui sont $\mathcal{O}(1/|n|^2)$. Cela est-il le cas pour une fonction C^2 par morceaux ? Donner une condition nécessaire et suffisante.

LXII (Théorème d'Abel-Dirichlet) On a déjà abordé cela dans un ancien exercice mais on recommence. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite (réelle ou complexe) telle que les sommes $S_n = \sum_{0\leq k\leq n} u_k$ soient bornées. Soit $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite décroissante tendant vers zéro. Montrer que la série $\sum_{n=0}^\infty u_n v_n$ est convergente. Donner un exemple pour lequel la série n'est pas absolument convergente. On suppose de plus que les u_n dépendent d'un paramètre x. Montrer que si les $S_n(x)$ sont uniformément bornées alors $\sum_{n=0}^\infty u_n(x) v_n$ est uniformément convergente. Donner un exemple pour lequel la série n'est pas normalement convergente. Si on suppose que les v_n dépendent aussi de x, quelle hypothèse supplémentaire suffira pour que $\sum_{n=0}^\infty u_n(x)v_n(x)$ soit garantie uniformément convergente ?

LXIII On pose $T_n(x) = \sum_{1\leq k\leq n} \sin(kx)$. Avec $x_n = \frac{\pi}{n}$, trouver un équivalent de $T_n(x_n)$ lorsque n tend vers l'infini. En déduire que les T_n ne sont pas uniformément bornés sur $[0, 2\pi]$. Donner une formule explicite pour les T_n ; montrer qu'ils sont uniformément bornés sur tout sous-intervalle fermé $[a, b] \subset]0, 2\pi[$.

LXIV (suite) On a rencontré à de multiples reprises la série $\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin(nx)}{n}$. Vérifier à nouveau que c'est la série de Fourier de la fonction impaire 2π-périodique qui vaut $\frac{\pi-x}{2}$ sur $]0, 2\pi[$. Comme il s'agit d'une fonction C^1 par morceaux, on sait que l'on a donc la convergence de la série et $\frac{\pi-x}{2} = \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin(nx)}{n}$ en tout $x \in]0, 2\pi[$ puisque tout tel x est un point de continuité. Confirmer que la série est convergente en invoquant le théorème d'Abel-Dirichlet. La série est-elle uniformément convergente sur $[0, 2\pi]$? Est-elle uniformément convergente sur $[a, b] \subset]0, 2\pi[$?

LXV (suite) Soit $0 < x < \pi$. Montrer $\sum_{n=1}^\infty \frac{|\sin(nx)|}{n} = +\infty$. Indications, montrer que : quitte à remplacer x par $\pi - x$ on peut supposer $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$. Quitte à passer à une sous-série, et à remplacer x par $2^k x$ pour un k approprié on peut se ramener à $\frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{2}$. Alors on ne peut

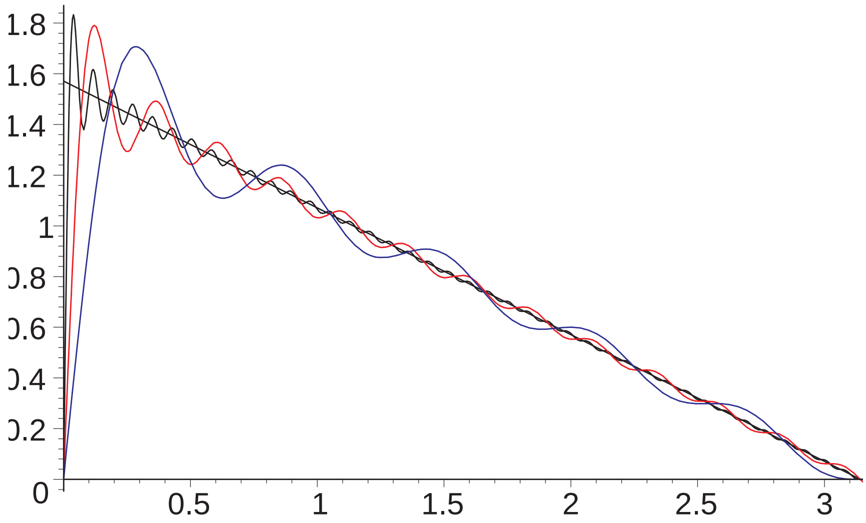
16. Votre travail devrait être justement de vous poser par vous-même ce genre de questions. Vous devez vous poser ces questions et y répondre par vous-même.

pas avoir à la fois $|\sin(3mx)| < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $|\sin((3m+1)x)| < \frac{1}{\sqrt{2}}$, et $|\sin((3m+2)x)| < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Conclure.

LXVI (suite) Relisez le texte qui vous a été distribué sur une approche élémentaire à la série de Fourier des fonctions « triangle ». Extrayez-en des inégalités qui montrent que les sommes partielles de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ sont uniformément bornées sur $\mathbf{R}$.

LXVII (suite) On revient par une autre méthode au problème de borner les $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}$. Soit, pour $n \geq 1$, $U_n(x) = \sum_{k=1}^{n}(1-\frac{k}{n})\frac{\sin(kx)}{k}$. Donner une expression intégrale pour $U_n(x)$ qui utilise les noyaux de Fejér et en déduire $\forall x \forall n \ |U_n(x)| \leq \frac{\pi}{2}$. En déduire : $\forall n \geq 1 \ \forall x \in \mathbf{R} \qquad |S_n(x)| \leq 1 + \frac{\pi}{2}$.

FIG. 4 – $\sum_{1 \leq n \leq N} \frac{\sin(nx)}{n}$ sur l'intervalle $[0, \pi]$ pour $N = 10, 25, 80$.



LXVIII (suite) En fait on a aussi les surprenantes inégalités :

$$\forall n \geq 1 \quad 0 < x < \pi \quad \Rightarrow \quad 0 < \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{\sin(kx)}{k}$$

Vous pourrez vous y essayer. Et à propos le maximum $M(n)$ est atteint en $x = \frac{\pi}{n+1}$, croît avec n et tend vers $C = \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$ qui est supérieur d'environ 18% à $\frac{\pi}{2}$. Voir sur la figure.

LXIX On note à nouveau $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}$. En utilisant une sommation d'Abel-Dirichlet appropriée et des résultats précédents montrer que la série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n\log(n)}$ est uniformément convergente sur $[-\pi, \pi]$. En déduire que sa somme $F(x)$ est une fonction continue impaire dont la série de Fourier est $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n\log(n)}$. Constater que pour cette fonction continue F (dont une approximation du graphe est donné dans la figure 5) on a $\sum_{k \in \mathbf{Z}} |c_k(F)| = +\infty$. La fonction F ne peut donc pas être C^1, et en effet on voit une tangente verticale à l'origine.[17]

LXX (suite) Montrer que pour tout $x \neq 0$ (modulo 2π) $F'(x)$ existe et vaut $G(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{\log(n)}$ (vous montrerez $F(x) = -\int_x^{\pi} G(t)\, dt$ pour $0 < x \leq \pi$ en étudiant l'uniformité de la convergence de la série pour G). À propos cette série est intéressante car on peut montrer que

17. D'ailleurs, on peut montrer que l'on a $F(x) \sim \frac{\pi}{2}\frac{1}{\log(1/x)}$ pour $x \to 0^+$. Cela n'utilise aucune mathématique extra-terrestre, en tout cas rien d'inconnu de vous mais il y aurait trop d'indications à donner.

Fig. 5 – $\sum_{2\le n\le 500} \frac{\sin(nx)}{n\log(n)}$

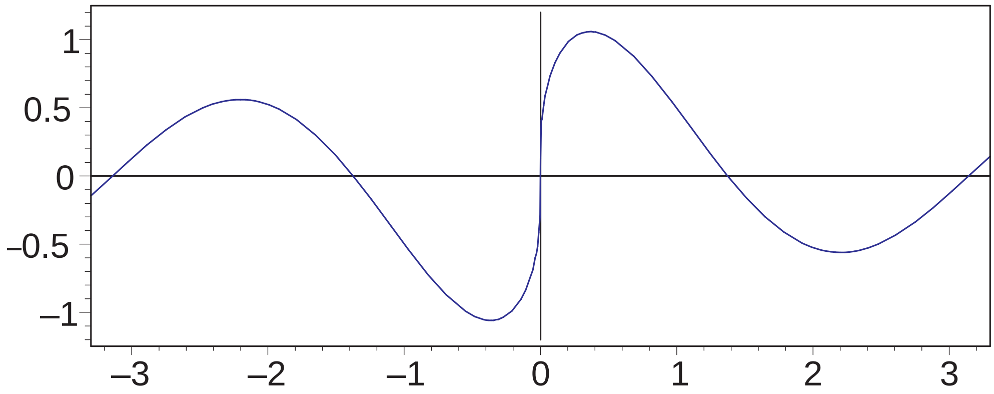
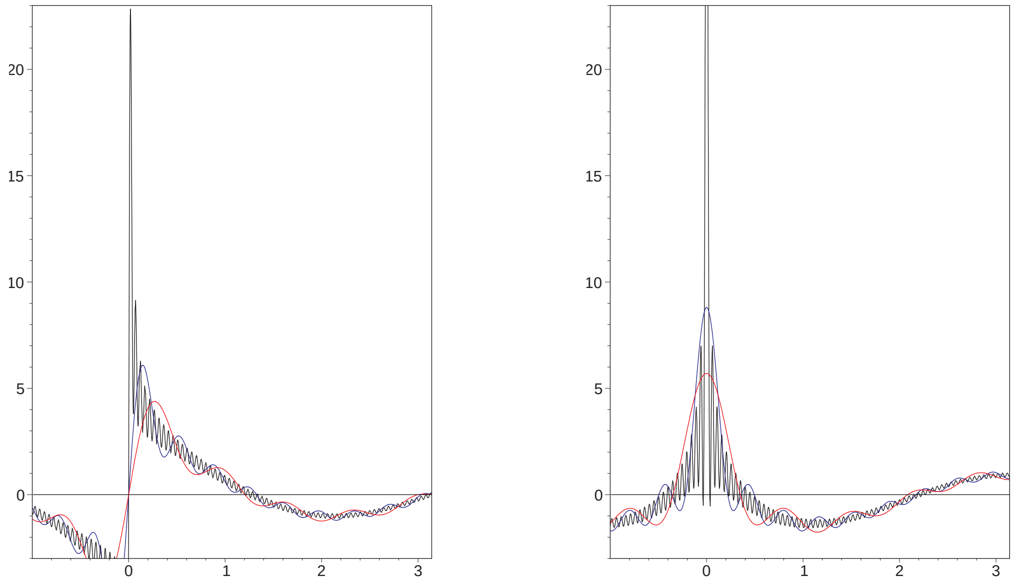


Fig. 6 – $\sum_{2\le n\le N} \frac{\sin(nx)}{\log(n)}$ et $\sum_{2\le n\le N} \frac{\cos(nx)}{\log(n)}$ pour $N = 9, 17, 129$. Le graphe de droite (pour $N = 129$) a été tronqué sur le haut. Les échelles horizontales et verticales diffèrent.



sa somme $G(x)$ est dans L^1 (on a $\lim_{x\to 0} G(x) = +\infty$, mais il se trouve que cette singularité n'est pas suffisamment sévère pour rendre G non-intégrable au sens de Lebesgue [18]). L'expression $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{\log(n)}$ est bien la série de Fourier de G, calculée par les formules de Fourier (et l'intégrale de Lebesgue), mais la série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{\log(n)}$ n'est pas convergente au sens L^1 (ses sommes partielles restent cependant bornées au sens L^1). Ma petite digression ne serait pas terminée sans évoquer la série cousine $K(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\log(n)}$ (voir la figure 6 pour des sommes partielles des séries définissant K (à gauche) et G (à droite)). La série converge pour tout x, K est une fonction impaire continue sauf en 0 (modulo 2π), et elle n'est pas intégrable au sens de Lebesgue : on a $\int_0^{\pi} |K(x)|\,dx = +\infty$. Cependant la théorie de Denjoy appelée « totalisation complète » donne un sens à des intégrales plus générales que celles de Lebesgue et les formules de Fourier sont alors valables pour toute série trigonométrique partout convergente, comme ici celle définissant

18. On a $G(x) \sim \frac{\pi}{2}(x\log^2(x))^{-1}$ pour $x \to 0^+$. Plus généralement, soit $a > 0$. Alors $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\log^a(n)} \sim \frac{1}{x|\log x|^a}$ et $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{\log^a(n)} \sim \frac{\pi a}{2x|\log x|^{a+1}}$ pour $x \to 0^+$. Les séries convergent pour $x \notin 2\pi\mathbf{Z}$ par le test d'Abel-Dirichlet.

la fonction K.[19]

LXXI (Continuité des translations) Soit f une fonction 2π-périodique, de carré intégrable sur une période. Soit $f_u(x) = f(x+u)$. Que vaut $\|f_u\|_2$? On suppose f continue, montrer que $u \mapsto f_u$ est continue de $\mathbf{R}$ vers L^2. On ne suppose plus f continue, montrer à nouveau que $u \mapsto f_u$ est continue de $\mathbf{R}$ vers L^2, en utilisant la densité des fonctions continues.

LXXII (suite) En utilisant l'identité de Bessel-Parseval, donner une formule pour $\|f_u - f_v\|_2$. Prouver à nouveau $\lim_{v\to u} f_v = f_u$ au sens L^2, pour toute $f \in L^2$.

LXXIII (suite) Soit f et g dans L^2. Déduire de ce qui précède que $f * g$ est une fonction continue (on écrira $(f*g)(x)$ comme un produit scalaire entre une fonction fixe et une dépendant de x). Montrer que sa série de Fourier est absolument convergente.

Rappel du cours : un espace hermitien V est un espace vectoriel complexe muni d'un produit scalaire « hermitien défini positif » (u, v), c'est-à-dire linéaire en u, conjugué linéaire en v, avec $(u, u) \geq 0$ et $(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$. En posant $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$ on a une inégalité de Cauchy-Schwarz : $|(u, v)| \leq \|u\|\|v\|$. De plus on a une norme : $\|u\| \geq 0$ avec égalité seulement si $u = 0$, $\|\alpha \cdot u\| = |\alpha|\|u\|$, $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$. Si V est **complet** comme espace métrique pour la distance $d(u, v) = \|u - v\|$, on dit que V est un **espace de Hilbert**. Dans un espace vectoriel hermitien (complet ou non) on dit que u est perpendiculaire à un ensemble A si pour tout v de A on a $(u, v) = 0$, et l'on note $u \perp A$, et aussi $A^\perp$ est $\{u \in V \mid u \perp A\}$: c'est toujours un sous-espace vectoriel de V. Un **espace de Banach** est une notion plus générale : c'est un espace vectoriel complexe avec une norme $\|u\|$ et complet comme espace métrique pour la distance $d(u, v) = \|u - v\|$. Il y a une norme, mais non nécessairement déduite d'un produit scalaire.

LXXIV Montrer $\Big| \|u\| - \|v\| \Big| \leq \|u - v\|$ dans tout espace vectoriel normé V.

LXXV (suite) Montrer que $u \mapsto \|u\|$ est une application continue de V vers $\mathbf{R}^+$.

LXXVI (suite) On suppose $V = \mathbf{C}^N$. Montrer qu'il existe $0 < c_1 \leq c_2$ avec $c_1 \cdot (|z_1| + \cdots + |z_N|) \leq \|u\| \leq c_2 \cdot (|z_1| + \cdots + |z_N|)$ pour tout $u = (z_1, \ldots, z_N)$.

LXXVII (suite) En déduire que la topologie est la même pour toutes les normes sur $\mathbf{C}^N$. Montrer que tout espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach.

LXXVIII Soit V un espace vectoriel normé. Montrer que V est un espace de Banach (c'est-à-dire est complet comme espace métrique) si et seulement si toute série $\sum_{k=1}^\infty g_k$ vérifiant $\sum_{k=1}^\infty \|g_k\| < \infty$ est convergente.

LXXIX On prend $V = L^1(a, b; dx)$ (ou L^2). Assurez-vous que voua avez compris la démonstration du cours qui dit que si $\sum_{k=1}^\infty \|g_k\| < \infty$ alors la série $G(x) = \sum_{k=1}^\infty g_k(x)$ est presque partout (absolument) convergente, et que $G = \sum_{k=1}^\infty g_k$ aussi au sens L^1 (respectivement, L^2).

LXXX Montrer que dans $L^1(a, b; dx)$ ou $L^2(a, b; dx)$ toute suite de Cauchy possède une sous-suite qui est presque partout (ponctuellement) convergente.

19. Aussi, dans le cadre de la théorie de Denjoy, toute fonction dérivable sur un intervalle est l'intégrale de sa dérivée, même si cette dérivée n'est pas intégrable au sens de Lebesgue. Vous en savez autant que moi maintenant.

LXXXI (formes sesquilinéaires) On considère un espace vectoriel complexe V et une forme sesquilinéaire $B(v,w)$ (c'est-à-dire linéaire en v, conjuguée linéaire en w). Rappels du cours : donner la formule qui donne $B(v,w)$ à partir de $B(v+w,v+w)$, $B(v-w,v-w)$, $B(v+iw,v+iw)$, $B(v-iw,v-iw)$, en déduire que si B et C sont deux formes sesquilinéaires telles que $\forall v\ B(v,v) = C(v,v)$ alors $B = C$; montrer que les conditions $\forall v\ B(v,v) \in \mathbf{R}$ et $\forall v \forall w\ B(w,v) = \overline{B(v,w)}$ sont équivalentes (une forme sesquilinéaire B est dite hermitienne si elle vérifie l'une de ces deux conditions). On suppose que l'on a maintenant un espace vectoriel **réel** et deux formes bilinéaires B et C. Montrer qu'il n'est pas vrai que $\forall v\ B(v,v) = C(v,v) \implies B = C$. Par contre montrer que c'est vrai si B et C sont deux formes bilinéaires symétriques (B est dite symétrique si $\forall v \forall w\ B(v,w) = B(w,v)$).

LXXXII (isométries) Une isométrie $\phi : V \to W$ est une application linéaire d'un espace hermitien vers un autre telle que $\forall v_1, v_2 \in V \quad (\phi(v_1), \phi(v_2))_W = (v_1, v_2)_V$. Montrer que l'application linéaire ϕ est une isométrie dès que $\forall v \in V \quad \|\phi(v)\|_W = \|v\|_V$. Montrer qu'une isométrie est toujours injective. Un opérateur linéaire $\phi : V \to V$ isométrique **et surjectif** d'un espace hermitien sur lui-même est aussi dit **unitaire**. On suppose V de dimension finie. Montrer que toute isométrie $\phi : V \to V$ est unitaire. Donner un exemple d'isométrie non unitaire d'un espace hermitien (de dimension infinie) V vers lui-même. On dit que deux espaces sont isométriques si il existe une isométrie bijective de l'un vers l'autre (la bijection réciproque est alors aussi isométrique). Montrer que les espaces $l^2(\mathbf{N})$, $l^2(\mathbf{Z})$, $l^2(\mathbf{Q})$ sont mutuellement isométriques.

LXXXIII (opérateurs unitaires en dimension finie) Soit V un espace hermitien de dimension finie. On le munit d'une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_N)$. Montrer que les isométries de V sont les applications linéaires ϕ dont les matrices $M(\phi)$ dans cette base vérifient la condition $M(\phi)^* \cdot M(\phi) = I_N$. Les matrices U telles que $U^* \cdot U = I_N$ sont dites unitaires. Montrer que les matrices unitaires forment un groupe pour la multiplication des matrices. On revient à l'espace V de dimension finie avec une isométrie $\phi : V \to V$. Soit v_1 un vecteur propre (que l'on prendra de norme $\|v_1\| = 1$) pour une valeur propre λ_1 (montrer $|\lambda_1| = 1$)[20]. Montrer que le sous-espace $W = \{v_1\}^\perp = \{w : (w, v_1) = 0\}$ est invariant par ϕ. En déduire qu'il existe une base orthonormée $(v_1, \ldots, v_N)$ de V formée de vecteurs propres pour ϕ. Montrer que toute matrice unitaire est diagonalisable dans une base orthonormée, et qu'une matrice qui se diagonalise dans une base orthonormée est unitaire si et seulement si ses valeurs propres sont de module 1.

LXXXIV (Bessel-Parseval en général) Soit V un espace hermitien et e_n, $0 \le n < N$ (éventuellement $N = \infty$) des vecteurs orthonormés. Prouver l'inégalité de Bessel générale :

$$\forall u \in V \qquad \sum_{0 \le n < N} |(u, e_n)|^2 \le \|u\|^2$$

Pour la preuve, interpréter les sommes partielles finies comme des normes au carré de projections orthogonales de u sur des espaces bien choisis. Dans l'inégalité de Bessel pour u on suppose que l'on a égalité. Supposons d'abord que N est fini. Que vaut $\|u - (u,e_0)e_0 - \cdots - (u, e_{N-1})e_{N-1}\|^2$? en déduire $u = \sum_{0 \le n < N} (u, e_n) e_n$. On suppose maintenant $N = \infty$. Montrer $u = \lim_{M \to \infty} \sum_{0 \le n \le M} (u, e_n) e_n$. En déduire que dans tous les cas l'égalité dans l'inégalité de Bessel implique l'appartenance de u au plus petit sous espace vectoriel fermé contenant les e_n

20. en dimension finie tout endomorphisme d'un espace vectoriel (complexe !) a un vecteur propre...

(l'adhérence des combinaisons linéaires finies des e_n). Réciproquement prouver que si u est dans cet espace alors il y a égalité dans l'inégalité de Bessel. On suppose finalement que l'inégalité de Bessel est en fait une égalité pour tout $u \in V$. Montrer que cela équivaut à dire que les combinaisons linéaires finies des e_n sont denses dans V : on dit que les e_n forment un « système complet » (une terminologie assez malheureuse à cause des emplois multiples du mot complet).

LXXXV (suite) Maintenant on suppose que V est un espace de Hilbert. On se donne un système orthonormé e_n, $0 \leq n < N$, donc avec N vecteurs (éventuellement une infinité dénombrable). Soit $u \in V$ montrer que $\lim_{M\to\infty} \sum_{0\leq n\leq M}(u, e_n)e_n$ existe (par exemple en vérifiant que c'est une suite de Cauchy). On note cette limite $P(u)$. Montrer que P est un opérateur linéaire. Montrer $\forall n$ $(u - P(u), e_n) = 0$ et en déduire $(u - P(u), P(u)) = 0$ et :

$$\|u\|^2 = \|u - P(u)\|^2 + \|P(u)\|^2$$

LXXXVI (suite) Soit H l'adhérence dans V des combinaisons linéaires finies des e_n. Montrer que $P(u)$ est la projection orthogonale de u sur H. Soit $A = \{j \in \mathbf{N}, j < N\}$, et soit v_j l'élément de $l^2(A)$ défini par $v_j(k) = \delta_{j,k}$. Montrer qu'il existe une unique application linéaire Φ de $l^2(A)$ vers H qui à v_j associe $e_j \in V$ pour tout j. Montrer que Φ est une bijection isométrique (autrement dit $(e_0, e_1, \dots)$ est une base orthonormée de H au sens de la définition du cours). En déduire que H est lui-aussi un espace de Hilbert.

LXXXVII (suite) Dans les exercices précédents on a prouvé que si $(e_n)_{0\leq n<N}$ est un système orthonormé dans un Hilbert V, alors c'est une base orthonormée de l'adhérence H des combinaisons linéaires finies des e_n. De plus on a prouvé l'existence d'une projection orthogonale P sur H. On suppose que les e_n ont la propriété qu'aucun vecteur non nul ne leur soit à tous perpendiculaires. En appliquant cela à $u - P(u)$ montrer qu'alors en fait $H = V$. En déduire que pour un système orthonormé $(e_n)_{0\leq n<N}$ dans un Hilbert V il y a équivalence entre :

1. le système est une base orthonormée de V,
2. le système est complet dans V,
3. le système a la propriété qu'aucun vecteur de V non nul ne lui est perpendiculaire.

LXXXVIII Soit V un espace de Hilbert et H un sous espace. Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1. H est fermé dans V,
2. H en tant qu'espace hermitien H est un espace de Hilbert.

LXXXIX (double perpendiculaire) Soit H un sous espace fermé de l'espace de Hilbert V. On note $H^\perp$ l'espace des vecteurs perpendiculaires à H. Montrer que $H^\perp$ est un sous-espace fermé de V. Montrer que tout vecteur u s'écrit de manière unique sous la forme $u_1 + u_2$ avec $u_1 \in H$ et $u_2 \in H^\perp$. Que vaut le produit scalaire (u, u_2) ? en déduire que si $u \perp H^\perp$ alors $u \in H$. En déduire l'identité $H = (H^\perp)^\perp$.

XC (suite) Soit H un sous espace vectoriel quelconque de l'espace de Hilbert V. Montrer que son double perpendiculaire $(H^\perp)^\perp$ coïncide avec son adhérence topologique $\overline{H}$.

XCI (projection orthogonale en dimension quelconque) Soit V un espace hermitien et $W \subset V$ un sous-espace vectoriel. On suppose que W est, pour le produit scalaire induit de V, un espace de Hilbert. Montrer que pour tout $v \in V$ il existe un unique vecteur $w \in W$

minimisant $\|v - w\|$, et que cela équivaut à $v - w \perp W$. Ind. : prendre une suite $(w_j)_{j\geq 1}$ minimisante et utiliser

$$\|w_j - w_k\|^2 + 4\|\frac{w_j + w_k}{2} - v\|^2 = 2\|w_j - v\|^2 + 2\|w_k - v\|^2$$

XCII (Gram-Schmidt) Soit v_1, v_2, etc...des vecteurs dans un espace hermitien, en nombre fini ou infini. On pose $H_0 = \{0\}$ et pour $n \geq 1$, on note H_n l'espace vectoriel engendré par $v_1, \ldots, v_n$, qui est de dimension au plus n ; puis l'on note P_n la projection orthogonale sur H_n et finalement on note $w_n = v_n - P_{n-1}(v_n)$. Montrer que w_n est perpendiculaire à H_{n-1}, que les w_n forment un système orthogonal, et (par récurrence) que H_n est engendré par $w_1, \ldots, w_n$. Le passage des v_j aux w_j s'appelle « orthogonalisation de Gram-Schmidt ». On suppose maintenant que les v_j sont linéairement indépendants (c'est-à-dire les combinaisons linéaires finies des v_j ne peuvent donner le vecteur nul que si tous les coefficients sont nuls). Montrer que les w_j sont alors eux aussi linéairement indépendants. Montrer que les formules correspondant à l'algorithme de Gram-Schmidt sont alors les suivantes :

$$\begin{array}{ll}
w_1 = v_1 & (w_1, w_1) = (v_1, v_1) \\
w_2 = v_2 - \dfrac{(v_2, w_1)}{(w_1, w_1)} w_1 & (w_2, w_2) = (v_2, w_2) = (v_2, v_2) - \dfrac{|(v_2, w_1)|^2}{(w_1, w_1)} \\
w_3 = v_3 - \dfrac{(v_3, w_1)}{(w_1, w_1)} w_1 - \dfrac{(v_3, w_2)}{(w_2, w_2)} w_2 & (w_3, w_3) = (v_3, w_3) = (v_3, v_3) - \dfrac{|(v_3, w_1)|^2}{(w_1, w_1)} - \dfrac{|(v_3, w_2)|^2}{(w_2, w_2)} \\
\cdots \; \cdots & \cdots \; \cdots \\
w_n = v_n - \displaystyle\sum_{1\leq j<n} \frac{(v_n, w_j)}{(w_j, w_j)} w_j & (w_n, w_n) = (v_n, w_n) = (v_n, v_n) - \displaystyle\sum_{1\leq j<n} \frac{|(v_n, w_j)|^2}{(w_j, w_j)}
\end{array}$$

Pourquoi a-t-on $(w_n, w_n) = (v_n, w_n)$? On notera aussi que parfois à chaque étape on normalise w_n en $w'_n = \frac{w_n}{\|w_n\|}$ ce qui simplifie ensuite la formule pour w_{n+1}, puisque $(w'_1, \ldots, w'_n)$ est une base orthonormée de H_n. Cependant cela oblige à calculer la racine carrée $\|w_n\|$ de (w_n, w_n). Dans les exercices qui viennent on va donner une autre formule pour (w_n, w_n), directement en fonction des v_j, $1 \leq j \leq n$.

XCIII (encore Cauchy-Schwarz) Soient u et v deux vecteurs dans un espace hermitien V. Soit A la matrice $\left(\begin{smallmatrix} (u,u) & (u,v) \\ (v,u) & (v,v) \end{smallmatrix}\right)$. Montrer que la matrice A est hermitienne : $A = A^*$, où de manière générale pour toute matrice M, rectangulaire ou carrée, on note M^* son conjugué hermitien, c'est-à-dire la matrice transposée dans laquelle on a en plus pris le conjugué complexe de toutes les entrées : $M^*_{ij} = \overline{M_{ji}}$. Vérifier $(MN)^* = N^*M^*$. Bien sûr l'identité $M = M^*$ n'est possible que pour les matrices carrées. Montrer que si M est une matrice hermitienne carrée alors $\det(M) \in \mathbf{R}$. Revenons à notre matrice $\left(\begin{smallmatrix} (u,u) & (u,v) \\ (v,u) & (v,v) \end{smallmatrix}\right)$. Montrer que l'inégalité de Cauchy-Schwarz équivaut à $\det(A) \geq 0$.

XCIV (Matrice et déterminant de Gram) L'exercice précédent suggère d'associer à tout système de n vecteurs v_j, $1 \leq j \leq n$ la matrice carrée $A = ((v_i, v_j))_{1\leq i,j\leq n}$. Montrer que cette matrice est une matrice hermitienne. On l'appelle « Matrice de Gram » des vecteurs $v_1, \ldots, v_n$, et je la note parfois $G(v_1, \ldots, v_n)$.[21] Son déterminant s'appelle « Gramien », et on le notera $g(v_1, \ldots, v_n)$. Il s'agit d'un nombre réel puisque la matrice de Gram est hermitienne. En fait il est même positif ou nul, comme nous allons le montrer maintenant, et ce fait est donc, par l'exercice précédent, une généralisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Supposons que l'on définisse, pour $1 \leq k \leq m$, des vecteurs $w_k = \sum_{1\leq j\leq n} P_{kj} v_j$. Soit P la matrice rectangulaire avec m lignes et n colonnes, $P = (P_{kj})_{1\leq k\leq m, 1\leq j\leq n}$. Montrer la formule matricielle :

$$G(w_1, \ldots, w_m) = P \cdot G(v_1, \ldots, v_n) \cdot P^*$$

et donc si $m = n$, c'est-à-dire dans le cas où P est une matrice carrée :

$$g(w_1, \ldots, w_n) = |\det(P)|^2 g(v_1, \ldots, v_n)$$

21. certains auteurs prennent comme définition de la matrice de Gram $((v_j, v_i))_{1\leq i,j\leq n}$ qui est la transposée de notre A, et est aussi $\overline{A}$. Le déterminant est le même.

On suppose maintenant que les v_j sont linéairement indépendants et que w_1, …, w_n sont obtenus par le procédé de Gram-Schmidt. Montrer que dans ce cas la matrice P est triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale. En déduire la formule remarquable :

$$g(v_1, \dots, v_n) = (w_1, w_1)(w_2, w_2) \dots (w_n, w_n)$$

qui prouve $g(v_1, \dots, v_n) > 0$ et qui montre aussi que dans l'algorithme de Gram-Schmidt on a $(w_j, w_j) = \frac{g_j}{g_{j-1}}$ avec $g_j = g(v_1, \dots, v_j)$, et $g_0 = 1$.[22] Enfin, dans le cas où les v_j ne sont pas linéairement indépendants, montrer que leur gramien est nul, en montrant que l'une des colonnes (ou lignes) de la matrice de Gram est combinaison linéaire des autres. En déduire pour conclure que le gramien est toujours positif ou nul et qu'il est strictement positif si et seulement si les vecteurs sont linéairement indépendants.

XCV (Système dual) On suppose que les vecteurs v_1, …, v_n sont linéairement indépendants, et soit H l'espace qu'ils engendrent. Montrer qu'il existe dans H pour chaque j un unique vecteur ξ_j tel que $(\xi_j, v_k) = 0$ pour $k \neq j$, $(\xi_j, v_j) = 1$ (par exemple, ramener le problème à la résolution d'un système linéaire ; ou encore, obtenir ξ_j par la formule $\frac{v'_j}{(v'_j, v_j)}$ avec $v'_j = v_j - Q_j(v_j)$, et Q_j la projection orthogonale sur l'espace engendré par les v_k, $k \neq j$; justifier $(v'_j, v_j) = (v'_j, v'_j) \neq 0$). Montrer que la projection orthogonale sur H est donnée par les deux formules :

$$P(v) = \sum_{1 \le j \le n} (v, v_j)\xi_j = \sum_{1 \le j \le n} (v, \xi_j) v_j$$

Montrer que $G(\xi_1, \dots, \xi_n)$ et $G(v_1, \dots, v_n)$ sont inverses l'une de l'autre.

XCVI Dans l'espace de Hilbert $V = L^2(0, 2\pi; \frac{dx}{2\pi})$ on considère le sous-espace vectoriel $H = \{f \in V \mid n < 0 \implies (f, e_n) = 0\}$. Comme d'habitude on a noté $e_n(x) = e^{inx}$.

1. Montrer que H est un sous-espace vectoriel fermé et prouver que $(e_n)_{n=0,1,\dots}$ en est une base orthonormée.
2. Déterminer les projections orthogonales des fonctions $f(x) = (2 - e^{ix})^{-1}$ et $g(x) = (1 - 2e^{ix})^{-1}$ sur H.
3. Pour $z \in \mathbf{C}, |z| < 1$ on considère $\Phi_z : V \to \mathbf{C}$, $\Phi_z(f) = \sum_{n=0}^{\infty} (f, e_n) z^n$. Trouver l'unique $f_z \in V$ avec $\forall f \in V\ \Phi_z(f) = (f, f_z)$ et déterminer (f_z, f_w) pour tout z, w dans $\mathbf{C}$ tels que $|z| < 1$, $|w| < 1$.
4. Prouver que $H^\perp$ est l'intersection des noyaux des Φ_z, $z \in \mathbf{C}$, $|z| < 1$.

XCVII Soit $H \subset V = L^2(0, 2\pi; \frac{dx}{2\pi})$ un sous espace vectoriel fermé. On suppose de plus que pour tout $g \in H$ les fonctions $e^{ix}g(x)$ et $e^{-ix}g(x)$ sont aussi dans H, autrement dit que $Q(x)g(x)$ est aussi dans H pour tout polynôme trigonométrique Q. On notera P la projection orthogonale sur H.

1. Soit maintenant $f \in H$ la projection orthogonale $P(1)$ sur H de la fonction constante 1. Montrer que $1 - f$ est perpendiculaire à $e^{inx} f(x)$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$.
2. Justifier que la fonction $(1 - f(x))\overline{f(x)}$ est dans L^1 et a tous ses coefficients de Fourier nuls.
3. Montrer qu'il existe une partie mesurable A telle que $f(x) = \mathbf{1}_A(x)$ c'est-à-dire (au sens du presque partout) $f(x) = 1$ pour $x \in A$, $f(x) = 0$ pour $x \notin A$.
4. Cette question est un peu plus difficile à traiter avec tous les détails : prouver que H est le sous-espace de V des (classes de) fonctions qui s'annulent (presque partout) sur le complémentaire de A. Et, pour conclure, on établira réciproquement que tout sous espace vectoriel ainsi défini est fermé dans V et est stable par multiplication par $e^{\pm ix}$.

22. cette belle formule théorique se heurte au calcul pratique des déterminants ; évidemment dans la pratique c'est justement au contraire pour calculer de tels déterminants que l'on utilise l'algorithme de Gram-Schmidt…

Exercices en surplus :

XCVIII Les gramiens définis dans les exercices précédents pour des vecteurs dans un espace hermitien existent aussi avec les mêmes formules pour des vecteurs dans un espace euclidien, en particulier dans $\mathbf{R}^N$ muni de sa structure euclidienne canonique. Soient v_1, ..., v_N, des vecteurs dans $\mathbf{R}^N$. Montrer que le volume du parallélotope $t_1v_1 + \cdots + t_Nv_N$, $0 \leq t_1 \leq 1$, ..., $0 \leq t_N \leq 1$ est la racine carrée du gramien des vecteurs v_1, ..., v_N. Le volume est calculé par rapport à la mesure de Lebesgue canonique, qui donne masse 1 à l'hypercube unité.

XCIX (Inégalité de Hadamard) Montrer $g(v_1, \ldots, v_n) \leq (v_1, v_1) \ldots (v_n, v_n)$ avec égalité si et seulement si soit les vecteurs v_j sont mutuellement perpendiculaires soit l'un d'entre eux est le vecteur nul. Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice carrée complexe ou réelle quelconque. Interpréter A^*A comme une matrice de Gram [23] et en déduire l'inégalité de Hadamard :

$$|\det(A)| \leq \prod_{1\leq j\leq n} \sqrt{\sum_{1\leq i\leq n} |a_{ij}|^2}$$

C (séparabilité) On se donne un espace de Hilbert V. Si V est de dimension finie alors il a une base orthonormée (finie). On suppose V de dimension infinie. On suppose que l'on peut trouver des vecteurs u_0, u_1, ...qui ont la propriété que la suite $(u_n)_{n=0,1,\ldots}$ est partout dense dans V : tout vecteur est limite d'une suite extraite. Montrer que le seul vecteur perpendiculaire à tous les u_n est le vecteur nul. On pose $H_0 = \{0\}$ et l'on note H_n l'espace vectoriel engendré par u_0, ..., u_{n-1}. Montrer qu'il y a une infinité de $n \geq 1$ tel que $\dim H_n = 1 + \dim H_{n-1}$. On les note $1 \leq n_1 < n_2 < \ldots$. Enfin on choisit e_k de norme 1 dans H_{n_k} perpendiculaire à H_{n_k-1}. Montrer que chaque u_n est combinaison linéaire finie des e_k, $k \geq 1$. En déduire que les e_k, $k \geq 1$ forment un système complet, et aussi orthonormé, dans V. En déduire que (e_k) est une base orthonormée dénombrable de V. Réciproquement si V possède une base orthonormée dénombrable montrer que l'on peut former une suite de vecteurs partout dense. On dit que l'espace de Hilbert est séparable. La séparabilité est donc la condition nécessaire est suffisante pour l'existence d'une base orthonormée dénombrable [24]. En utilisant la notion de séparabilité, prouver que si V possède une base orthonormée dénombrable alors tout sous espace fermé de V possède aussi une base orthonormée dénombrable.

CI (deuxième formule de la moyenne) La deuxième formule de la moyenne est aux fonctions ce que la sommation d'Abel-Dirichlet (exercice L) est aux séries. Soit ϕ décroissante positive sur $[x, y]$, soit f intégrable sur cet intervalle, alors :

$$\left|\int_x^y \phi(t)f(t)dt\right| \leq \phi(x) \sup_{x\leq t\leq y} \left|\int_x^t f(u)du\right| \qquad (\phi \text{ décroissante positive})$$

Remarquez bien que les valeurs absolues sont à l'extérieur des intégrales. Faites la preuve :

1. pour ϕ de classe C^1 et f continue, par une intégration par parties,

23. prendre comme vecteurs les conjugués complexes des colonnes de A
24. finie ou infinie : notre convention est que les ensembles finis sont dénombrables.

2. en toute généralité en admettant qu'après avoir modifié $\phi(t)$ en au plus un nombre dénombrable de points pour qu'elle soit continue à droite[25] on peut écrire $\phi(t) = \int_{]t,y]} d\mu(u) + \phi(y)$ avec μ une mesure positive et en utilisant Fubini.

Pour encore une autre méthode de preuve, voir le texte Théorème de Dirichlet sur le site de votre Professeur. Lorsque f est à valeurs **réelles** justifier alors :

$$\exists \xi \in]x,y[\quad \int_x^y \phi(t)f(t)dt = \phi(x^+)\int_x^\xi f(t)dt + \phi(y^-)\int_\xi^y f(t)dt$$

valable pour toute ϕ monotone (pas seulement décroissante positive).

CII En appliquant la deuxième formule de la moyenne à la fonction $\sin(x/2)^{-1}$ qui est monotone sur l'intervalle d'extrémités a et π $(0 < a < 2\pi)$, prouver $\left|\int_a^\pi D_N(t)\frac{dt}{2\pi}\right| \leq \frac{1}{\pi(N+\frac{1}{2})\sin(\frac{a}{2})}$, et en déduire pour $0 < a < b < 2\pi$:$\left|\int_a^b D_N(t)\frac{dt}{2\pi}\right| \leq \frac{1}{(N+\frac{1}{2})\pi}\left(\frac{1}{\sin(\frac{a}{2})} + \frac{1}{\sin(\frac{b}{2})}\right)$. Montrer plus généralement $|(D_N * \mathbf{1}_{]a,b[})(x)| \leq \frac{1}{(N+\frac{1}{2})\pi}\left(\frac{1}{\sin(\frac{a-x}{2})} + \frac{1}{\sin(\frac{b-x}{2})}\right)$ pour $b - 2\pi < x < a$. En déduire que si ϕ est une fonction en escalier, identiquement nulle sur $]u,v[$ (avec $u < 0 < v$) alors la série de Fourier $D_n * \phi$ converge uniformément vers zéro sur tout sous-intervalle $[u',v'] \subset]u,v[$ fermé. En déduire que si f et g sont deux fonctions intégrables qui coïncident sur $]u,v[$ la différence $S_N(f) - S_N(g)$ converge uniformément vers 0 sur tout sous-intervalle $[u',v'] \subset]u,v[$ fermé.

CIII On revient au problème de borner uniformément les $s_n(x) = \sum_{1\leq k\leq n}\frac{\sin(kx)}{k}$. On peut supposer $0 < x \leq \pi$ (pourquoi ?). On pose $u_k(x) = \sin(kx)$, $v_k = \frac{1}{k}$, pour $k \geq 1$ (et $u_0(x) = 0$). On note $A_n(x) = u_1(x) + \cdots + u_n(x)$. Montrer $|A_n(x)| \leq \sin(x/2)^{-1}$ et même $|A_n(x) - A_m(x)| \leq \sin(x/2)^{-1}$ pour tout n, m. En déduire (par sommation d'Abel) $\left|\sum_{k=n+1}^\infty \frac{\sin(kx)}{k}\right| \leq \frac{1}{\sin(x/2)}\frac{1}{n+1}$. Montrer alors :

$$nx \geq \pi \implies |s_n(x)| \leq \frac{\pi - x}{2} + \frac{x}{\pi\sin(x/2)} < \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \quad (= 2.2074\ldots)$$

Pour $0 < nx < \pi$ prouver en utilisant une somme de Riemann (on observera que la fonction $\frac{\sin(x)}{x}$ est strictement décroissante sur $]0,\pi]$) : $0 < s_n(x) < \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t}dt \quad (= 1.8519\ldots)$. En déduire

$$\forall x \in \mathbf{R}\ \forall n \geq 1 \qquad \left|\sum_{1\leq k\leq n}\frac{\sin(kx)}{k}\right| < \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}$$

En fait, c'est bien $\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t}dt$ qui est la borne optimale. Se reporter à l'annexe Gibbs sur le site de votre Professeur.

CIV (un théorème de Cantor) Il semble que Riemann connaissait le résultat suivant mais qu'il n'en ait pas donné explicitement la preuve : *si pour tout x il est vrai que* $\lim_{n\to\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx) = 0)$ *alors* $\lim\ a_n = 0$ *et* $\lim\ b_n = 0$. Ce n'est pas un résultat évident, lorsque vous y aurez suffisamment réfléchi reportez vous au texte Cantor-Lebesgue sur le site de votre Professeur.

25. autrement dit on remplace $\phi(t)$ par $\phi(t^+)$.