Université Lille 1 — UFR de Mathématiques
Licence de Mathématiques (L3, S6, année 2006–2007)

M312 (« Analyse Hilbertienne »)
EXAMEN DU 28 JUIN 2007
durée : 3 heures ; ni documents ni calculatrices

(1 pt) **A.** Lorsque deux fonctions 2π-périodiques F et G, intégrables sur une période, sont données, comment s'expriment les coefficients de Fourier $c_n(F * G)$, $n \in \mathbf{Z}$, de la convolution $F * G$ en fonction de ceux de F et de G ?

(5 pts) **B.**

1. Soit f, 2π-périodique, intégrable sur $[0, 2\pi]$. Rappeler, sans démonstration, comment s'exprime, comme polynôme trigonométrique, la $n^{\text{ième}}$ somme de Fejér de f, à savoir la convolution $f * F_n$ de f avec le $n^{\text{ième}}$ noyau de Fejér.
2. (suite) que peut-on dire, d'une manière générale, au sujet de $f * F_n$ lorsque n tend vers l'infini, sous la seule hypothèse de l'intégrabilité de f ?
3. (suite) et si de plus f est une fonction continue ?
4. Quel est l'énoncé précis du théorème de l'identité de Bessel-Parseval pour une fonction f (avec les coefficients de Fourier $c_n(f)$) ?
5. On suppose que $\|f\|_2 = \|f * F_n\|_2$ pour un certain n. Que peut-on dire de f ?

(7 pts) **C.**

1. On considère une suite de fonctions K_n, 2π-périodiques et intégrables, pour $n = 0, 1, 2, \dots$. Rappeler avec précision ce que signifie (d'après le cours) « $(K_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une approximation de l'identité ».
2. Soit g une fonction 2π périodique et intégrable sur $[0, 2\pi]$. On pose, pour $n \geq 1$: $G_n(x) = \dfrac{n}{2\pi} \displaystyle\int_{x-\frac{\pi}{n}}^{x+\frac{\pi}{n}} g(y)\, dy$. Exprimer G_n sous la forme d'une convolution $K_n * g$.
3. (suite) Prouver alors que G_n converge vers g au sens L^1.
4. (suite) Exprimer les coefficients de Fourier $c_k(G_n)$, $k \in \mathbf{Z}$, en fonction de ceux de g.
5. (suite) On suppose dorénavant que g est de carré intégrable. Prouver que la série de Fourier de chaque G_n est normalement convergente.
6. (suite) Prouver $\|G_n\|_2 \leq \|g\|_2$.
7. (suite) Prouver $\lim \|G_n\|_2 = \|g\|_2$.

TOURNEZ LA PAGE

(3 pts) **D.** Soit $A > 1$ et $B > 1$ et soit $f(x) = A - e^{ix}$ et $g(x) = B - e^{ix}$.

1. Déterminer explicitement la fonction $k = f * g$.
2. Déterminer explicitement la fonction $K = \frac{1}{f} * \frac{1}{g}$.

(5 pts) **E.** Soit V un espace hermitien. Soit $A : V \to V$ un opérateur, c'est-à-dire un morphisme d'espaces vectoriels. On dira que l'opérateur A est hermitien si la condition suivante est vérifiée :

$$\forall u, v \in V \qquad (A(u), v) = (u, A(v))$$

De plus, au lieu d'écrire $A(u)$, on écrira simplement Au. Ainsi $A^2u = A(A(u))$. L'opérateur identité est noté I. Enfin, on utilisera dans cet exercice la notation :

$$\langle A \rangle_u = (u, Au)$$

On considère deux opérateurs hermitiens A et B et un vecteur u vérifiant $\|u\| = 1$.

1. Déterminer $\inf_{t\in\mathbf{R}} \langle (A - tI)^2 \rangle_u$ en fonction de $\langle A^2 \rangle_u$ et de $\langle A \rangle_u$. Le minimum est-il atteint ? pour quel t ?
2. On note $[A, B] = AB - BA$. En utilisant le caractère hermitien des opérateurs A et B, exprimer $\langle [A, B] \rangle_u$ en fonction de la partie imaginaire de (Au, Bu) et en déduire une majoration de $|\langle [A, B] \rangle_u|$ en fonction de $\langle A^2 \rangle_u$ et de $\langle B^2 \rangle_u$.
3. On pose $\Delta_u(A) = \sqrt{\langle A^2 \rangle_u - \langle A \rangle_u^2}$ et $\Delta_u(B) = \sqrt{\langle B^2 \rangle_u - \langle B \rangle_u^2}$. En combinant les réponses aux questions précédentes prouver l'inégalité :

$$\Delta_u(A)\Delta_u(B) \geq \frac{1}{2} \left| \langle [A, B] \rangle_u \right|$$