Université Lille 1 — UFR de Mathématiques
Licence de Mathématiques (L3, S6, année 2006–2007)

M312 (« Analyse Hilbertienne »)
EXAMEN DU 31 MAI 2007
CORRIGÉ

Les problèmes sont mutuellement indépendants.

(6 pts) **A.** On considère la fonction paire, 2π-périodique, qui vaut $f(x) = \sqrt{x}$ pour $0 \leq x \leq \pi$.

1. La fonction f est-elle continue ? est-elle de classe C^1 par morceaux ?
2. Calculer $a_0(f)$.
3. Montrer $a_n(f) = \frac{-1}{\pi n\sqrt{n}} \int_0^{n\pi} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\, dt$ pour $n \geq 1$.
4. Montrer que l'intégrale impropre $I = \int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\, dt$ est convergente. Établir à ce propos l'inégalité $\forall X > 0 \quad |\int_X^{\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\, dt| \leq \frac{2}{\sqrt{X}}$.
5. Exprimer $a_n(f)$ en fonction de n, de I, et de $u_n = \int_{n\pi}^{\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\, dt$.
6. Montrer que la série de Fourier de f est normalement convergente et que f est partout égale à la somme de sa série de Fourier.
7. En étudiant la série de Fourier de f pour $x = 0$ établir $I > 0$. On pourra dans cette question utiliser la valeur connue $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Corrigé :

1. La fonction f vaut $\sqrt{|x|}$ sur $]-\pi, \pi[$, donc est continue sur cet intervalle. Par 2π-périodicité elle est donc continue au moins sur $\mathbf{R} \setminus (\pi + 2\pi\mathbf{Z})$. Comme $f(\pi + \epsilon) = f(-\pi + \epsilon) = f(\pi - \epsilon)$, les limites à droite et à gauche en π sont les mêmes et égales à $\sqrt{\pi}$. Donc f est continue aussi en π et donc en tout point de $\mathbf{R}$. La dérivée à droite en $x = 0$ est $+\infty$, f n'est donc pas C^1 par morceaux.
2. On a $a_0(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{t}dt = \frac{2}{\pi}\frac{2}{3}\pi^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}$.
3. On a pour $n \geq 1$, $a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{t}\cos(nt)dt = \frac{2}{\pi}\left[\sqrt{t}\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\frac{1}{2}\frac{1}{n}\int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{t}}\sin(nt)\, dt$.
Donc $a_n(f) = \frac{-1}{\pi n}\int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{t}}\sin(nt)\, dt = \frac{-1}{\pi n}\int_0^{n\pi} \frac{1}{\sqrt{t/n}}\sin(t)\frac{dt}{n} = \frac{-1}{\pi n\sqrt{n}}\int_0^{n\pi} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\, dt$.
4. En intégrant par parties on a $\int_X^Y \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}dt = \left[\frac{-\cos(t)}{\sqrt{t}}\right]_X^Y - \int_X^Y \frac{\cos(t)}{2t\sqrt{t}}\, dt$. La dernière intégrale est absolument convergente et le terme entre crochets a la contribution de Y qui tend vers 0 lorsque $Y \to \infty$. Donc $\int_X^{\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}dt$ existe et vaut $\frac{\cos(X)}{\sqrt{X}} - \int_X^{\infty} \frac{\cos(t)}{2t\sqrt{t}}\, dt$. On en déduit aussi la majoration :
$$\left|\int_X^{\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}dt\right| \leq \frac{1}{\sqrt{X}} + \int_X^{\infty} \frac{1}{2t\sqrt{t}}\, dt = \frac{2}{\sqrt{X}}$$
On aurait aussi pu utiliser la deuxième formule de la moyenne. Bien sûr en $t \to 0^+$ il n'y avait pas de problème de convergence puisque $\lim_{t\to 0^+} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}$ existe et est finie (et vaut zéro).

5. $a_n(f) = \frac{-1}{\pi n\sqrt{n}} \int_0^{n\pi} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\, dt = \frac{-1}{\pi n\sqrt{n}}(I - u_n) = \frac{-I}{\pi n\sqrt{n}} + \frac{u_n}{\pi n\sqrt{n}}$.
6. D'après une question précédente on a $|u_n| \leq \frac{2}{\sqrt{\pi n}}$. Donc $|a_n(f)| \leq \frac{|I|}{\pi n\sqrt{n}} + \frac{2}{\pi\sqrt{\pi}n^2}$. Il y a donc convergence normale de la série de Fourier de f. Soit F la somme de la série de Fourier. Pour montrer que $F(x) = f(x)$ est partout vrai, on peut par exemple dire que comme il y a convergence normale $a_n(F)$ peut se calculer en permutant intégrale et série, donc $a_n(F) = a_n(f)$; et aussi $b_n(F) = b_n(f) = 0$ pour tout n les deux fonctions étant impaires. Par le théorème d'unicité $F = f$ presque partout donc partout car elles sont continues. Ou alors on peut invoquer le théorème de Fejér : les sommes de Fejér, qui sont les moyennes de Cesàro des sommes partielles de la série de Fourier convergent partout vers f (et uniformément). Comme la série de Fourier converge, sa limite, par le théorème de Cesàro, est la même que celle de ses moyennes de Cesàro. Donc $F = f$. Ou encore on peut considérer la fonction continue $F - f$ et lui appliquer l'identité de Bessel-Parseval. On en déduit que la fonction continue positive $|F - f|^2$ est d'intégrale nulle, donc $F = f$ identiquement.
7. Pour $x = 0$ en utilisant les formules pour $a_0(f)$ et les $a_n(f)$ on a donc

$$0 = \frac{2}{3}\sqrt{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-I}{\pi n\sqrt{n}} + \frac{u_n}{\pi n\sqrt{n}} \right)$$

Ainsi $I \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n\sqrt{n}} = \frac{2}{3}\sqrt{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{\pi n\sqrt{n}}$. Or $\frac{u_n}{\pi n\sqrt{n}} \geq -\frac{2}{\pi\sqrt{\pi}n^2}$ par la majoration de $|u_n|$. Ceci donne $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{\pi n\sqrt{n}} \geq -\frac{2}{\pi\sqrt{\pi}}\frac{\pi^2}{6} = -\frac{1}{3}\sqrt{\pi}$, et en combinant :

$$I \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n\sqrt{n}} \geq \frac{2}{3}\sqrt{\pi} - \frac{1}{3}\sqrt{\pi} = \frac{1}{3}\sqrt{\pi}$$

et en particulier $I > 0$.

(7 pts) **B.** Soit f une fonction 2π-périodique intégrable. On suppose que la quantité $\sum_{k\in\mathbf{Z}} |k||c_k|^2$ est finie. On a noté c_k le $k^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier $c_k(f)$, $k \in \mathbf{Z}$, de f.

1. Montrer que f est de carré intégrable.
2. Pour un x donné on note $s_n(x) = \sum_{k=-n}^{k=+n} c_k e^{ikx}$ la $n^{\text{ième}}$ somme partielle de la série de Fourier et $\sigma_n(x)$ la $n^{\text{ième}}$ somme de Fejér. Exprimer la différence $\delta_n(x) = s_n(x) - \sigma_n(x)$ en fonction des c_k, et de x (et n).
3. Soit $N \in \mathbf{N}$ et $n \geq N$. Prouver $\sum_{N\leq|k|\leq n} |k||c_k| \leq n\sqrt{2}\sqrt{\sum_{k\in\mathbf{Z},|k|\geq N} |k||c_k|^2}$.
4. Prouver alors $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{|k|\leq n} |k||c_k| = 0$.
5. Prouver que $\delta_n(x)$ converge uniformément vers zéro pour $n \to \infty$.
6. On suppose de plus que f est une fonction continue. Montrer que la série de Fourier de f converge uniformément (vers f).
7. Montrer que l'hypothèse $\sum_{k\in\mathbf{Z}} |k||c_k|^2 < \infty$ est vérifiée en particulier lorsqu'il existe une constante C telle que $|c_k| \leq \frac{C}{|k|\log|k|}$ pour $|k| \geq 2$.

Corrigé :

1. Comme $\sum_{k\in\mathbf{Z}}|c_k|^2 = |c_0|^2+\sum_{k\in\mathbf{Z},k\neq 0}|c_k|^2 \leq |c_0|^2+\sum_{k\in\mathbf{Z}}|k||c_k|^2$ on a $\sum_{k\in\mathbf{Z}}|c_k|^2 < \infty$. On sait par le cours qu'alors f est de carré intégrable.
2. On connaît la formule $\sigma_n(x) = \sum_{k=-n}^{k=+n}(1-\frac{|k|}{n})c_k e^{ikx}$, donc
$$\delta_n(x) = \sum_{k=-n}^{k=+n}\frac{|k|}{n}c_k e^{ikx}$$
.
3. On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les sommes finies :
$$\sum_{N\leq|k|\leq n}|k||c_k| = \sum_{N\leq|k|\leq n}|k|^{\frac12}|k|^{\frac12}|c_k| \leq \sqrt{\sum_{N\leq|k|\leq n}|k|}\sqrt{\sum_{N\leq|k|\leq n}|k||c_k|^2}$$
On peut majorer $\sum_{N\leq|k|\leq n}|k| \leq \sum_{N\leq|k|\leq n} n \leq 2n\cdot n$ ($k=0$ contribue 0 ; Bien sûr la formule exacte est $n(n+1)$ et c'est bien $\leq 2n^2$ car $n\leq n^2$ (aussi pour $n=0\ldots$)) . Donc
$$\sum_{N\leq|k|\leq n}|k||c_k| \leq \sqrt{2}n\sqrt{\sum_{N\leq|k|<\infty}|k||c_k|^2}$$
4. On prend $N\geq 1$ que l'on fera tendre vers l'infini plus tard. Pour tout $n\geq N$ on écrit :
$$\frac1n\sum_{|k|\leq n}|k||c_k| = \frac1n\sum_{|k|<N}|k||c_k|+\frac1n\sum_{N\leq|k|\leq n}|k||c_k| \leq \frac1n\sum_{|k|<N}|k||c_k|+\sqrt{2}\sqrt{\sum_{N\leq|k|<\infty}|k||c_k|^2}$$
Le terme le plus à droite ne dépend pas de n. La somme finie $\sum_{|k|<N}|k||c_k|$ non plus. On fait tendre n vers l'infini et on obtient :
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac1n\sum_{|k|\leq n}|k||c_k| \leq \sqrt{2}\sqrt{\sum_{N\leq|k|<\infty}|k||c_k|^2}$$
L'entier N est arbitraire, on peut donc le faire tendre vers l'infini. Pour toute série convergente les restes tendent vers zéro. Donc $\overline{\lim}\frac1n\sum_{|k|\leq n}|k||c_k| \leq 0$ et finalement $\lim\frac1n\sum_{|k|\leq n}|k||c_k| \leq 0$. On peut aussi rédiger avec un $\epsilon>0$, choisir le N qui convient pour ce ϵ, etc...
5. D'après la formule exacte pour $\delta_n(x)$ on a pour tout x, $|\delta_n(x)| \leq \frac1n\sum_{|k|\leq n}|k||c_k|$. Donc $\delta_n \Rightarrow 0$ sur $\mathbf{R}$.
6. Si f est continue, on sait alors par le théorème de Fejér que $\sigma_n\Rightarrow f$ sur $\mathbf{R}$. Compte tenu de $\delta_n\Rightarrow 0$ et de $s_n=\sigma_n+\delta_n$, on obtient la convergence uniforme sur $\mathbf{R}$ des s_n vers f.
7. Il est bien connu que la série $\sum_{k\geq 2}\frac{1}{k\log^2 k}$ est convergente. En effet la fonction $x\mapsto x\log^2 x$ est croissante pour $x\geq 1$, donc la fonction $x\mapsto g(x) = (x\log^2 x)^{-1}$ est décroissante pour $x\geq 2$, à valeurs positives, et donc $\sum_{k=2}^K g(k) \leq g(2)+\int_2^K g(x)\,dx$ (en mettant les « rectangles en dessous du graphe »). Et $\int_2^K g(x)\,dx = \left[\frac{-1}{\log x}\right]_2^K = \frac{1}{\log 2}-\frac{1}{\log K} \leq \frac{1}{\log 2}$. Donc si on a $|c_k| = \mathcal{O}((|k|\log|k|)^{-1})$ la convergence de $\sum|k||c_k|^2$ est assurée.

(4 pts) **C.** On pose $F(x) = \frac{1}{5-4\cos(x)}$.

1. Exprimer F comme fraction rationnelle en $z = e^{ix}$ et réduire en éléments simples.
2. Déduire de la question précédente la série de Fourier de F.
3. Déterminer la fonction G égale à la projection orthogonale de F sur le sous-espace $H \subset L^2$ engendré par les e_n, $n \geq 0$. Comme d'habitude $e_n(x) = e^{inx}$. On demande une représentation explicite de G (c'est-à-dire pas sous la forme d'une série).
4. Déterminer la fonction K qui est la projection orthogonale de F sur le sous-espace de L^2 engendré par les e_{2m}, $m \in \mathbf{Z}$. On demande une représentation explicite de K comme fonction de x.

Corrigé :

1. $F(x) = \frac{1}{5-2(z+\frac{1}{z})} = \frac{-z}{2z^2-5z+2}$. Le discriminant $5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9 = 3^2$, racines $(5 \pm 3)/(2 \cdot 2) = 2$ et $1/2$. Donc $F(x) = \frac{-z}{2z^2-5z+2} = \frac{A}{z-\frac{1}{2}} + \frac{B}{z-2}$. Et $A = \frac{-1/2}{4(1/2)-5} = \frac{1}{6}$ et $B = \frac{-2}{4(2)-5} = -\frac{2}{3}$. Donc
$$F(x) = \frac{1}{6}\frac{1}{z-\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}\frac{1}{z-2}$$
2. Pour $|z| = 1$ on écrira :
$$F(x) = \frac{1}{6z}\frac{1}{1-\frac{1}{2}(z^{-1})} + \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z} = \frac{1}{6z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}z^{-k} + \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}z^k = \frac{1}{3}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\frac{1}{2^{|k|}}z^k$$
Les coefficients de Fourier de F sont donc $c_k(F) = \frac{1}{3}2^{-|k|}$.
3. Comme $F = \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k(F)e_k$ sa projection orthogonale sur H est $G = \sum_{k\geq 0} c_k(F)e_k$. C'est-à-dire $G(x) = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}z^k = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z}$ avec $z = e^{ix}$.
4. Pour cette question on aura donc, toujours avec $z = e^{ix}$, $K(x) = \frac{1}{3}\sum_{m\in\mathbf{Z}}\frac{1}{2^{2|m|}}z^{2m}$. Ainsi
$$K(x) = \frac{1}{3}\sum_{m\in\mathbf{Z}}\frac{1}{4^{|m|}}(z^2)^m = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z^2}{4}} + \frac{1}{3}\frac{1}{4z^2}\frac{1}{1-\frac{(1/z)^2}{4}} = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{4-z^2} + \frac{1}{4z^2-1}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\frac{16z^2-4+4-z^2}{(4-z^2)(4z^2-1)} = \frac{5z^2}{-4z^4+17z^2-4} = \frac{5}{17-4(z^2+z^{-2})} = \frac{5}{17-8\cos(2x)}$$
Remarquons que les coefficients de Fourier de $F(x+\pi)$ sont $(-1)^n$ ceux de F, donc on aurait pu écrire tout de suite que $K(x) = \frac{1}{2}(F(x)+F(x+\pi)) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5-4\cos(x)} + \frac{1}{5+4\cos(x)}\right)$. Après simplification cela redonne la formule ci-dessus.

(2 pts) **D.** Que peut-on dire de la convolution de deux fonctions 2π-périodiques de carrés intégrables ? Soit A un sous-ensemble de l'intervalle $[0, \pi]$, de mesure de Lebesgue strictement positive. En considérant $\mathbf{1}_A * \mathbf{1}_B$ avec B un ensemble bien choisi, montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que tout $x \in [-\delta, \delta]$ peut s'écrire $x = t - u$ avec $t, u \in A$.

Corrigé : La convolution de deux fonctions de carrés intégrables est automatiquement une fonction continue (c'est aussi le cas pour la convolution d'une fonction quelconque intégrable avec une fonction bornée). Donc la fonction $f = \mathbf{1}_A * \mathbf{1}_B$ est continue. Pour B on prend l'ensemble $-A$. Les fonctions $\mathbf{1}_A$ et $\mathbf{1}_B$ sont prolongées par 2π-périodicité. On a

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{1}_A(t)\mathbf{1}_B(x-t)\, dt$$

La fonction que l'on intègre vaut 1 si t vérifie simultanément les deux conditions $t \in A + 2\pi\mathbf{Z}$ et $x - t \in B + 2\pi\mathbf{Z}$ et elle vaut 0 sinon. Pour $-\pi < t < \pi$ la première condition équivaut à $t \in A$. On a alors $0 \leq t \leq \pi$ et donc si on prend $|x| < \pi$, automatiquement $-2\pi < x - t < \pi$, donc $x - t \in B + 2\pi\mathbf{Z}$ équivaut alors à $x - t \in B$ puisque $B \subset [-\pi, 0]$. La valeur de $f(x)$ est donc $1/2\pi$ fois la mesure des t tels que $t \in A$ et $x - t \in B$ ou encore tels que $t \in A$ et $t - x \in A$. Pour $x = 0$ on a donc $f(0) = \frac{1}{2\pi}|A| > 0$. Par continuité pour $|x|$ petit on aura $f(x) > 0$ et donc en particulier il existe au moins un $t \in A$ avec $t - x \in A$. On pose $u = t - x$ et on obtient $t - u = t - (t - x) = x$.

(2 pts) **E.** On se donne une suite $(\epsilon_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels positifs avec $\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$. Montrer qu'il existe une fonction continue $f(x)$ dont les coefficients de Fourier $c_n(f)$ vérifient $|c_n(f)| \geq \epsilon_n$ pour une infinité de $n \geq 0$. Indication : penser à construire f en utilisant une suite extraite bien choisie de $(\epsilon_n)_{n\geq 0}$.

Corrigé : On construit une suite extraite n_k avec $0 \leq \epsilon_{n_k} \leq 2^{-k}$: on prend n_1 le premier entier tel que $\epsilon_{n_1} \leq \frac{1}{2}$, puis n_2 le premier entier strictement supérieur à n_1 et tel que $\epsilon_{n_2} \leq \frac{1}{4}$, etc...On considère la fonction $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_{n_k} e^{in_k x}$. La série est normalement convergente et la fonction f est donc une fonction continue. Son ${n_k}^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier est ϵ_{n_k}, et par conséquent $|c_n(f)| \geq \epsilon_n$ est vrai pour tous les n de la forme n_k, donc pour une infinité de n.

Remarque : posons $\epsilon'_n = \sqrt{\epsilon_n}$. Si on construit une fonction g par la même méthode on pourra affirmer qu'il est faux que les $c_n(g)$ sont $\mathcal{O}(\epsilon_n)$. Donc quelle que soit la suite positive qui tend vers zéro il existe une fonction continue dont les coefficients de Fourier tendent encore plus lentement vers zéro.