Université Lille 1 — UFR de Mathématiques
Licence de Mathématiques (L3, S6, année 2006–2007)

M312 (« Analyse Hilbertienne »)
EXAMEN DU 31 MAI 2007
durée : 3 heures ; ni documents ni calculatrices

Les problèmes sont mutuellement indépendants.

(6 pts) **A.** On considère la fonction paire, 2π-périodique, qui vaut $f(x) = \sqrt{x}$ pour $0 \leq x \leq \pi$.

1. La fonction f est-elle continue ? est-elle de classe C^1 par morceaux ?
2. Calculer $a_0(f)$.
3. Montrer $a_n(f) = \frac{-1}{\pi n\sqrt{n}} \int_0^{n\pi} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\, dt$ pour $n \geq 1$.
4. Montrer que l'intégrale impropre $I = \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\, dt$ est convergente. Établir à ce propos l'inégalité $\forall X > 0 \quad |\int_X^\infty \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\, dt| \leq \frac{2}{\sqrt{X}}$.
5. Exprimer $a_n(f)$ en fonction de n, de I, et de $u_n = \int_{n\pi}^\infty \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\, dt$.
6. Montrer que la série de Fourier de f est normalement convergente et que f est partout égale à la somme de sa série de Fourier.
7. En étudiant la série de Fourier de f pour $x = 0$ établir $I > 0$. On pourra dans cette question utiliser la valeur connue $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

(7 pts) **B.** Soit f une fonction 2π-périodique intégrable. On suppose que la quantité $\sum_{k\in\mathbf{Z}} |k||c_k|^2$ est finie. On a noté c_k le $k^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier $c_k(f)$, $k \in \mathbf{Z}$, de f.

1. Montrer que f est de carré intégrable.
2. Pour un x donné on note $s_n(x) = \sum_{k=-n}^{k=+n} c_k e^{ikx}$ la $n^{\text{ième}}$ somme partielle de la série de Fourier et $\sigma_n(x)$ la $n^{\text{ième}}$ somme de Fejér. Exprimer la différence $\delta_n(x) = s_n(x) - \sigma_n(x)$ en fonction des c_k, et de x (et n).
3. Soit $N \in \mathbf{N}$ et $n \geq N$. Prouver $\sum_{N\leq|k|\leq n} |k||c_k| \leq n\sqrt{2}\sqrt{\sum_{k\in\mathbf{Z},|k|\geq N} |k||c_k|^2}$.
4. Prouver alors $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{|k|\leq n} |k||c_k| = 0$.
5. Prouver que $\delta_n(x)$ converge uniformément vers zéro pour $n \to \infty$.
6. On suppose de plus que f est une fonction continue. Montrer que la série de Fourier de f converge uniformément (vers f).
7. Montrer que l'hypothèse $\sum_{k\in\mathbf{Z}} |k||c_k|^2 < \infty$ est vérifiée en particulier lorsqu'il existe une constante C telle que $|c_k| \leq \frac{C}{|k|\log|k|}$ pour $|k| \geq 2$.

(4 pts) **C.** On pose $F(x) = \frac{1}{5-4\cos(x)}$.

1. Exprimer F comme fraction rationnelle en $z = e^{ix}$ et réduire en éléments simples.
2. Déduire de la question précédente la série de Fourier de F.
3. Déterminer la fonction G égale à la projection orthogonale de F sur le sous-espace $H \subset L^2$ engendré par les e_n, $n \geq 0$. Comme d'habitude $e_n(x) = e^{inx}$. On demande une représentation explicite de G (c'est-à-dire pas sous la forme d'une série).
4. Déterminer la fonction K qui est la projection orthogonale de F sur le sous-espace de L^2 engendré par les e_{2m}, $m \in \mathbf{Z}$. On demande une représentation explicite de K comme fonction de x.

(2 pts) **D.** Que peut-on dire de la convolution de deux fonctions 2π-périodiques de carrés intégrables ? Soit A un sous-ensemble de l'intervalle $[0, \pi]$, de mesure de Lebesgue strictement positive. En considérant $\mathbf{1}_A * \mathbf{1}_B$ avec B un ensemble bien choisi, montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que tout $x \in [-\delta, \delta]$ peut s'écrire $x = t - u$ avec $t, u \in A$.

(2 pts) **E.** On se donne une suite $(\epsilon_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels positifs avec $\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$. Montrer qu'il existe une fonction continue $f(x)$ dont les coefficients de Fourier $c_n(f)$ vérifient $|c_n(f)| \geq \epsilon_n$ pour une infinité de $n \geq 0$. Indication : penser à construire f en utilisant une suite extraite bien choisie de $(\epsilon_n)_{n\geq 0}$.