Université Lille 1 — UFR de Mathématiques
Licence de Mathématiques
(L3, S5, année 2006–2007)

M305 : PARTIEL DU 15 NOVEMBRE 2006
CORRIGÉ

– Dans les énoncés « déterminer » signifie « déterminer en le justifiant ».
– Barême indicatif : 2,3,4,2,2,3,4. Ne méritent des points que des textes constitués de démonstrations rédigées de manière correcte et complète.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} 8^n z^{3n}$.

Le terme général est $8^n z^{3n} = (2z)^{3n}$. On a $|2z|^{3n} \underset{n\to\infty}{\to} \infty$ pour $|z| > \frac{1}{2}$ donc le rayon de convergence est au plus $\frac{1}{2}$. On a $|2z|^{3n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ pour $|z| < \frac{1}{2}$ donc le rayon de convergence est au moins $\frac{1}{2}$. Le rayon de convergence est $\frac{1}{2}$.

2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} 5^n\ z^{n^2}$.

Soit $u_n = |5^n\ z^{n^2}| = 5^n |z|^{n^2}$. Pour déterminer le comportement de u_n, supposons $z \neq 0$ et écrivons u_n sous la forme $e^{\log(5)n + \log(|z|)n^2}$. Si $|z| > 1$ alors $\log|z| > 0$ et $\log(5)n + \log(|z|)n^2 \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$, donc $u_n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$. Le rayon de convergence est donc au plus 1. Si $|z| < 1$ alors $\log|z| < 0$ et $\log(5)n + \log(|z|)n^2 \underset{n\to\infty}{\to} -\infty$ donc $u_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Par conséquent le rayon de convergence est au moins 1. Le rayon de convergence demandé est donc 1.

3. Soit R_1 le rayon de convergence d'une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et R_2 le rayon de convergence d'une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. Soit alors R_3 le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$. Prouver $R_3 \geq \inf(R_1, R_2)$ et donner un exemple avec l'inégalité stricte.

Notons $R = \inf(R_1, R_2)$. Le disque $D(0, R)$ est inclus dans $D(0, R_1)$ donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge sur ce disque. De même, $D(0, R) \subset D(0, R_2)$ donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ converge sur $D(0, R)$. La somme $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$ est donc elle-aussi une série convergente sur ce disque, ce qui établit que son rayon de convergence R_3 est au moins R. Un exemple avec inégalité stricte est obtenu en prenant $a_n = 1$ pour tout n et $b_n = -a_n$ pour tout n. La série somme est identiquement nulle et a donc un rayon de convergence infini qui est bien strictement supérieur à $\inf(R_1, R_2) = 1$.

4. Déterminer la série de Taylor de la fonction $\operatorname{Log} z$ au point $z_0 = 2i$.

La série de Taylor est donnée par la formule :

$$\operatorname{Log}(2i + h) = \operatorname{Log}(2i) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Log}^{(n)}(2i)}{n!} h^n$$

La suite au verso

Notons $f(z) = \operatorname{Log} z$, de sorte que $f'(z) = \frac{1}{z}$, $f''(z) = -z^{-2}$, $f^{(3)}(z) = +2z^{-3}$. Prenons comme hypothèse de récurrence, pour $n \geq 1$, $f^{(n)}(z) = (-1)^{n-1}(n-1)!z^{-n}$. C'est vrai pour $n = 1, 2, 3$, supposons le vrai pour n, alors $f^{(n+1)}(z) = (-1)^{n-1}(n-1)!(-n)z^{-n-1} = (-1)^n n!z^{-n-1}$, ce qui établit la propriété au rang $n+1$. Ainsi :

$$\operatorname{Log}(2i + h) = \operatorname{Log}(2i) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{h^n}{(2i)^n} = \log(2) + i\frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n2^n} h^n$$

5. Déterminer la série de Laurent pour $|z| > 1$ de $\dfrac{1}{z^5 - z^{-5}}$.

Pour $|z| > 1$, on a $|z|^{-1} < 1$ donc :

$$\frac{1}{z^5 - z^{-5}} = \frac{z^{-5}}{1 - (\frac{1}{z})^{10}} = z^{-5} \sum_{k=0}^{\infty} z^{-10k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-5-10k}$$

Les coefficients c_n de la série de Laurent sont donc nuls pour $n \geq 0$ et pour les $n < 0$ non congrus à 5 modulo 10 et valent 1 pour les $n < 0$ congrus à 5 modulo 10.

6. Soit λ et μ deux nombres réels, et soit F la fonction de $z = x + iy$ définie par

$$F(z) = x^3 + \lambda xy^2 + i(-y^3 + \mu x^2 y)$$

Déterminer les valeurs de λ et μ pour lesquelles F est une fonction entière. Identifier F lorsque cela est le cas.

On a $\frac{\partial}{\partial x}F = 3x^2 + \lambda y^2 + i(2\mu xy)$ et $\frac{\partial}{\partial y}F = 2\lambda xy + i(-3y^2 + \mu x^2)$, donc $\frac{\partial}{\partial x}F + i\frac{\partial}{\partial y}F = 3x^2 + \lambda y^2 + 3y^2 - \mu x^2 + i(2(\mu + \lambda)xy)$. Pour que cela soit identiquement nul sur $\mathbf{C}$ (et donc que l'équation de Cauchy-Riemann $\frac{\partial}{\partial x}F = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}F$ soit vérifiée) il faut que $\mu = 3$ et $\lambda = -3$ (on doit avoir $3x^2 + \lambda y^2 + 3y^2 - \mu x^2 = 0$, en particulier pour $(x, y) = (1, 0)$ donc $\mu = 3$ et pour $(x, y) = (0, 1)$ donc $\lambda = -3$). Dans ce cas $F(z) = x^3 - 3xy^2 + i(-y^3 + 3x^2 y) = (x + iy)^3 = z^3$, qui est bien une fonction entière.

7. Soit f une fonction holomorphe sur $D(0, 1)$ vérifiant :

$$x \in \,]-1, +1[\, \Longrightarrow (f(x) \in \mathbf{R} \text{ et } f(ix) \in \mathbf{R})$$

Montrer que f est paire.

Comme f est à valeurs réelles sur $]-1, 1[$ il en est de même de f', f'', et par récurrence de toutes ses dérivées. La série de Taylor $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est donc à coefficients $a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)$ réels. Il en sera de même, par l'hypothèse faite, de la série pour $f(iz)$, donc on a aussi $i^n a_n \in \mathbf{R}$ pour tout n. Pour n impair on a donc a_n à la fois réel et imaginaire pur, donc nul. Donc $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} z^{2k}$. Ainsi $f(-z) = f(z)$ et f est bien une fonction paire.