Université Lille 1 — UFR de Mathématiques
Licence de Mathématiques
(L3, S5, année 2006–2007)

M305 : PARTIEL DU 15 NOVEMBRE 2006
10h30–12h30 au A4

- Dans les énoncés « déterminer » signifie « déterminer en le justifiant ».
- Barême indicatif : 2,3,4,2,2,3,4. Ne méritent des points que des textes constitués de démonstrations rédigées de manière correcte et complète.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} 8^n z^{3n}$.

2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} 5^n \, z^{n^2}$.

3. Soit R_1 le rayon de convergence d'une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et R_2 le rayon de convergence d'une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. Soit alors R_3 le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)z^n$. Prouver $R_3 \geq \inf(R_1, R_2)$ et donner un exemple avec l'inégalité stricte.

4. Déterminer la série de Taylor de la fonction $\operatorname{Log} z$ au point $z_0 = 2i$.

5. Déterminer la série de Laurent pour $|z| > 1$ de $\dfrac{1}{z^5 - z^{-5}}$.

6. Soit λ et μ deux nombres réels, et soit F la fonction de $z = x + iy$ définie par

$$F(z) = x^3 + \lambda xy^2 + i(-y^3 + \mu x^2 y)$$

Déterminer les valeurs de λ et μ pour lesquelles F est une fonction entière. Identifier F lorsque cela est le cas.

7. Soit f une fonction holomorphe sur $D(0,1)$ vérifiant :

$$x \in \,]-1, +1[\; \Longrightarrow \; (f(x) \in \mathbf{R} \text{ et } f(ix) \in \mathbf{R})$$

Montrer que f est paire.