Université Lille 1 — UFR de Mathématiques
Licence de Mathématiques (L3, S5, année 2006–2007)

M305 : ANALYSE COMPLEXE

Responsable : Jean-François Burnol

2^7 exercices

1

1.1 Montrer que la fonction $f(z) = \frac{1}{z}$ est holomorphe sur $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ et vérifie $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$.

1.2 Si f et g sont deux fonctions dérivables au sens complexe au point z_0 montrer que $f+g$, $f-g$ et fg le sont et donner la valeur de leurs dérivées au point z_0.

1.3 Faites de même pour $\frac{f}{g}$ lorsque $g(z_0) \neq 0$.

1.4 Montrer la formule pour la dérivée d'une composition $g \circ f$.

1.5 Soit f et g deux fonctions n-fois dérivables au sens complexe sur un ouvert non vide U (remarque : d'après le cours il suffit qu'elles soient dérivables une fois sur U pour qu'elles le soient un nombre quelconque de fois). Montrer la formule de Leibnitz généralisée :

$$\forall z \in U \qquad (fg)^{(n)}(z) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f^{(j)}(z) g^{(n-j)}(z)$$

1.6 On se donne deux séries entières $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ de rayons de convergences R_1 et R_2 non nuls. En utilisant le théorème sur les séries doubles prouver $f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ pour $|z| < R = \min(R_1, R_2)$ avec (formules dites de Cauchy) :

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$$

Le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ est-il toujours égal à $\min(R_1, R_2)$ ou peut-il être plus grand ? Donner des exemples.

1.7 Retrouver les coefficients $c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$ de l'exercice précédent en utlilisant la formule de Leibnitz pour calculer les dérivées à l'origine de la fonction holomorphe $k(z) = f(z)g(z)$. Cependant pour que cette méthode permette de prouver aussi que le rayon de convergence est au moins $\min(R_1, R_2)$, il faut invoquer le théorème de Cauchy qui dit que la série de Taylor à l'origine d'une fonction analytique sur $D(0, \rho)$ a rayon de convergence au moins égal à ρ.

1.8 En quels points la fonction $z \mapsto \overline{z}$ est-elle dérivable au sens complexe, et/ou holomorphe ? Même question pour les fonctions $z \mapsto x$ et $z \mapsto y$.

1.9 On adopte dans cet exercice et le suivant la définition qui suit : un ouvert G est dit *connexe* si pour tout choix de points z_0 et z_1 dans G il existe une ligne continue formée de segments horizontaux ou verticaux, débutant en z_0 et s'achevant en z_1. Prouver qu'une fonction holomorphe sur un ouvert connexe et dont la dérivée est identiquement nulle est une constante. Et si l'ouvert n'est pas connexe ?

1.10 Sur un ouvert connexe U on se donne une fonction holomorphe f qui a la propriété de ne prendre que des valeurs réelles. En utilisant les équations de Cauchy-Riemann, montrer que f est constante. Et si U n'est pas connexe ?

2

2.1 Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Est-il exact que pour $|z| > R$ on a $\lim |a_n z^n| = \infty$?

2.2 Déterminer les séries de Taylor à l'origine de $\frac{1}{1-z}$, $\frac{1}{(1-z)^2}$, $\frac{1}{(1-z)^3}$, $\frac{1}{(1-z)^4}$.

2.3 Déterminer en tout $z_0 \neq 1$ la série de Taylor et son rayon de convergence pour la fonction analytique $\frac{1}{z-1}$.

2.4 Déterminer en tout $z_0 \neq 1,\ 2$ la série de Taylor et son rayon de convergence pour la fonction analytique $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$. On aura intérêt à réduire en éléments simples.

2.5 Déterminer en tout point z_0 où elle est définie la série de Taylor de la fonction $\frac{1}{z^3-1}$. On déterminera son rayon de convergence en fonction de z_0.

2.6 Montrer que le rayon de convergence de chacune des séries ci-dessous est 1 et prouver :

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n z^n$ ne converge en aucun point du cercle $|z| = 1$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ converge en tout point du cercle $|z| = 1$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ converge en tout point du cercle $|z| = 1$ **sauf** en $z = 1$.

Pour ce dernier cas on définit $S_0 = 1$, $S_1 = 1+z$, $S_2 = 1+z+z^2, \ldots$(on pose aussi $S_{-1} = 0$). En écrivant $z^n = S_n - S_{n-1}$ exprimer $\sum_{n=1}^{N} \frac{z^n}{n}$ en fonction des S_n. Montrer que les S_n sont bornées lorsque $|z| = 1$, $z \neq 1$. Conclure.

2.7 Soit $\Omega = \mathbf{C} \setminus \{]-\infty, 0]\}$. Déterminer en tout $z_0 \in \Omega$ la série de Taylor de la fonction holomorphe $z \mapsto \operatorname{Log} z$ ainsi que son rayon de convergence. Soit z_0 avec $\operatorname{Re}(z_0) < 0$. Soit R_0 le rayon de convergence pour z_0 et soit $f(z)$ la somme de la série dans $D(z_0, R_0)$. A-t-on $f(z) = \operatorname{Log} z$ dans $D(z_0, R_0)$?

2.8 On considère la fonction analytique $f(z) = \frac{1}{\sin(z)}$ sur l'ouvert U complémentaire de $\pi\mathbf{Z}$. Vérifier que la fonction $\sin(z)$ ne s'annule jamais sur U. Déterminer en tout $z_0 \in U$ donné le rayon de convergence du développement en série de Taylor de f. Remarque : le théorème général de Cauchy minore le rayon de convergence ; il suffit donc de trouver un argument le majorant.

2.9 Montrer $\operatorname{Log}(zw) = \operatorname{Log}(z) + \operatorname{Log}(w)$ lorsque $-\pi < \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w) < +\pi$. Montrer $\operatorname{Log}(1 + h + k + hk) = \operatorname{Log}(1 + h) + \operatorname{Log}(1 + k)$ lorsque $|h| < 1$, $|k| < 1$.

Soit $a \in \mathbf{C}$. On considère sur le disque $D(0,1)$ la fonction analytique $f_a(z) = \exp(a\,\mathrm{Log}(1+z))$. Montrer pour $a \in \mathbf{Z}$: $f_a(z) = (1+z)^a$. Pour $a = \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$, $p, q \in \mathbf{Z}$ montrer $f_a(z)^q = (1+z)^p$. Montrer $f_{a+b} = f_a f_b$. On notera donc dorénavant $f_a(z) = (1+z)^a$. Que vaut $f_a'(z)$? Donner explicitement la série de Taylor de f_a à l'origine (formule de Newton [1]) et déterminer son rayon de convergence. La formule $\exp(a\,\mathrm{Log}(1+z))$ définit une fonction analytique, que nous noterons aussi $(1+z)^a$, sur $\mathbf{C} \setminus \{]-\infty, -1]\}$. Que valent $\lim_{\epsilon\to 0^+} f_a(z+i\epsilon)$ et $\lim_{\epsilon\to 0^+} f_a(z-i\epsilon)$ pour $-\infty < z < -1$?

3

Lorsque z est complexe les fonctions $\sin(z)$, $\cos(z)$, $\mathrm{sh}(z)$ et $\mathrm{ch}(z)$ sont définies par les formules :

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \mathrm{sh}(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$
$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \mathrm{ch}(z) = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

3.1 Montrer que cos et ch sont des fonctions paires et sin et sh des fonctions impaires et donner leurs représentations comme séries entières. Prouver $e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$, $\sin(iz) = i\,\mathrm{sh}(z)$, $\cos(iz) = \mathrm{ch}(z)$, $\mathrm{sh}(iz) = i\sin(z)$, $\mathrm{ch}(iz) = \cos(z)$.

3.2 Établir les formules :

$$\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$$

$$\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$$

en écrivant de deux manières différentes $e^{\pm i(z+w)}$. Donner une autre preuve en utilisant le principe du prolongement analytique et la validité (admise) des formules pour z et w réels.

3.3 Prouver pour tout z complexe $\cos(\pi + z) = -\cos(z)$, $\sin(\pi + z) = -\sin(z)$. Prouver $\cos(\frac{\pi}{2} - z) = \sin(z)$.

3.4 Prouver les formules $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ et $\mathrm{ch}^2 z - \mathrm{sh}^2 z = 1$ pour tout $z \in \mathbf{C}$.

3.5 Montrer $\sin(a+ib) = \sin(a)\,\mathrm{ch}(b) + i\cos(a)\,\mathrm{sh}(b)$. Puis en prenant dorénavant a et b réels, prouver :

$$a, b \in \mathbf{R} \implies \quad |\sin(a+ib)|^2 = \sin^2(a) + \mathrm{sh}^2(b)$$

Déterminer alors les nombres complexes $z = a + ib$ tels que $\sin(z) = 0$. Donner une autre preuve.

3.6 Montrer

$$a, b \in \mathbf{R} \implies \quad |\cos(a+ib)|^2 = \cos^2(a) + \mathrm{sh}^2(b) = \mathrm{ch}^2(b) - \sin^2(a)$$

Déterminer les nombres complexes z avec $\cos(z) = 0$.

1. Isaac Newton 1643 Woolsthorpe - 1727 Londres

4

Dans ces exercices on est censé connaître (un peu) la notion de système de coordonnées (sur un ouvert du plan, donc nous aurons 2 coordonnées) et aussi ce que signifie une dérivée partielle par rapport à l'une ou l'autre des coordonnées d'un système.

4.1 Le Laplacien $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ est un opérateur différentiel qui joue un rôle important en analyse complexe. Soit $f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$ une fonction holomorphe sur un ouvert du plan complexe. On sait que f, donc u et v, admettent des dérivées partielles de tous les ordres. En utilisant les équations de Cauchy-Riemann, montrer que u et v vérifient l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

On dit d'une fonction vérifiant l'équation de Laplace qu'elle est harmonique. La fonction holomorphe $f = u+iv$ est aussi une fonction harmonique puisque $\Delta(f) = \Delta(u)+i\Delta(v) = 0$.

4.2 On veut exprimer les équations de Cauchy-Riemann avec les coordonnées polaires r et θ. Les équations de Cauchy-Riemann peuvent s'écrire sous la forme :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) F = 0$$

donc il s'agit d'exprimer $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ en fonction de $\frac{\partial}{\partial r}$ et de $\frac{\partial}{\partial \theta}$ lorsque l'on travaille sur un ouvert (ne contenant pas l'origine) sur lequel une détermination continue de l'argument θ est possible (par exemple sur $\Omega = \mathbf{C}\setminus]-\infty, 0]$). Montrer :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} &= \cos(\theta)\frac{\partial}{\partial x} + \sin(\theta)\frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} &= -r\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial x} + r\cos(\theta)\frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

En déduire $\frac{\partial}{\partial x} = \cos(\theta)\frac{\partial}{\partial r} - \sin(\theta)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial}{\partial y} = \sin(\theta)\frac{\partial}{\partial r} + \cos(\theta)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$. Montrer alors :

$$\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} = e^{i\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r} + i\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) = e^{i\theta}\frac{1}{r}\left(r\frac{\partial}{\partial r} + i\frac{\partial}{\partial \theta}\right)$$

En déduire qu'en coordonnées polaires les équations de Cauchy-Riemann peuvent s'écrire (en particulier) sous la forme :

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = i\, r\frac{\partial F}{\partial r}$$

4.3 Il est intéressant que l'équation de l'exercice précédent $\frac{\partial F}{\partial \theta} = i\, r\frac{\partial F}{\partial r}$, peut se réécrire dans le système de coordonnées $(a, b) = (\log(r), \theta)$ sous la forme :

$$\frac{\partial F}{\partial b} = i\,\frac{\partial F}{\partial a}\ ,$$

autrement dit exactement sous la même forme qu'ont les équations de Cauchy-Riemann originelles dans les coordonnées cartésiennes (x, y).[2] Or a et b sont les parties réelles et imaginaires de la

2. $\frac{\partial F}{\partial y} = i\frac{\partial F}{\partial x}$, ou, plus memnotechnique : $\frac{\partial F}{i\,\partial y} = \frac{\partial F}{\partial x}$ qui dit « holomorphe $\Leftrightarrow$ iy est comme x ».

combinaison $a+ib$ qui est holomorphe comme fonction de $x+iy$: $a+ib=\log(x+iy)$. Montrer que cela est général : dans un système de coordonnées (a,b) telles que $w=a+ib$ est une fonction holomorphe de $z=x+iy$ les équations de Cauchy-Riemann pour l'holomorphie (par rapport à (x,y)) d'une fonction F sont $\frac{\partial F}{\partial b}=i\frac{\partial F}{\partial a}$ (ce qui équivaut à l'holomorphie de F comme fonction « sur le plan de $w=a+ib$ »[3]). Indication : prouver l'identité

$$\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}=\left(\frac{\partial a}{\partial x}-i\frac{\partial b}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial a}+i\frac{\partial}{\partial b}\right) ,$$

en exploitant les équations de Cauchy-Riemann $\frac{\partial b}{\partial x}=-\frac{\partial a}{\partial y}$, $\frac{\partial a}{\partial x}=+\frac{\partial b}{\partial y}$ pour $a+ib=g(x+iy)$.

4.4 On veut exprimer le Laplacien avec les coordonnées polaires r et θ : autrement dit pour toute fonction deux fois différentiable Φ on veut calculer la fonction $\Delta(\Phi)$ à l'aide des opérateurs de dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial r}$ et $\frac{\partial}{\partial\theta}$, lorsque l'on travaille sur un ouvert (ne contenant pas l'origine) dans lequel une détermination continue de l'argument θ est possible (par exemple sur $\Omega=\mathbf{C}\setminus]-\infty,0]$). Une méthode possible est d'utiliser les expressions obtenues dans l'exercice **4.2**

$$\frac{\partial}{\partial x}=\cos(\theta)\frac{\partial}{\partial r}-\sin(\theta)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\qquad\frac{\partial}{\partial y}=\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial r}+\cos(\theta)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} ,$$

et de calculer ensuite $(\frac{\partial}{\partial x})^2$ et $(\frac{\partial}{\partial y})^2$ puis de faire la somme. Mais cela donne des calculs un peu longs. Voici une ruse : en reprenant une formule déjà établie dans **4.2** montrer

$$(x-iy)\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)=r\frac{\partial}{\partial r}+i\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$(x+iy)\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)=r\frac{\partial}{\partial r}-i\frac{\partial}{\partial\theta}$$

On remarquera maintenant que l'opérateur différentiel $\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}$ appliqué à la fonction $x+iy$ donne zéro. Donc (expliquer !) :

$$(x-iy)\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)(x+iy)\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)=(x-iy)(x+iy)\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

Prouver alors en conclusion :

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=\frac{1}{r^2}\left((r\frac{\partial}{\partial r})^2+\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\Phi=\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}$$

5

5.1 Soit $\gamma=[A,B]+[B,C]+[C,D]+[D,A]$ le bord (parcouru dans le sens direct) du carré de sommets $A=1-i$, $B=1+i$, $C=-1+i$, $D=-1-i$. Déterminer les intégrales suivantes :

3. autrement dit pour qu'une fonction soit holomorphe comme fonction de $x+iy$ il est nécessaire et suffisant qu'elle soit holomorphe comme fonction de $a+ib$. En particulier $x+iy$ est une fonction holomorphe de $a+ib$: on a donc prouvé que la réciproque d'une bijection holomorphe est aussi holomorphe. D'autres méthodes existent pour le montrer.

1. $\int_\gamma dx$, $\int_\gamma x\,dx$, $\int_\gamma x^2\,dx$, $\int_\gamma y\,dx$, $\int_\gamma y^2\,dx$, $\int_\gamma y^3\,dx$,
2. $\int_\gamma x\,dx + y\,dy$, $\int_\gamma x\,dy + y\,dx$, $\int_\gamma x\,dy - y\,dx$,
3. $\int_\gamma dz$, $\int_\gamma z\,dz$, $\int_\gamma x\,dz$, $\int_\gamma z\,dx$,
4. $\int_\gamma z^{-1}\,dz$, $\int_\gamma z^{-2}\,dz$, $\int_\gamma z^n\,dz$, pour $n \in \mathbf{Z}$.

5.2 On note C le cercle de rayon 1 parcouru dans le sens direct. Calculer $\int_C z^n\,dz$ et $\int_\gamma z^n\,dz$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$, et vérifier qu'il y a toujours égalité (ici $\gamma = \partial\mathcal{R}$ est le bord du carré de sommets $A = 1 - i$, $B = 1 + i$, $C = -1 + i$, $D = -1 - i$). Calculer $\int_C \overline{z}^n\,dz$ et $\int_\gamma \overline{z}^n\,dz$ et trouver les cas d'égalités et d'inégalités.

5.3 Soit C un cercle de centre quelconque, parcouru dans le sens direct, et ne passant pas par l'origine. Calculer $\int_C z^n\,dz$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$ dans le cas où C encercle l'origine, et dans le cas où C n'encercle pas l'origine. Indication pour $n = -1$: soit w l'affixe du centre du cercle, et R son rayon. Paramétrer le cercle par $z = w(1 + \frac{R}{|w|}e^{i\theta})$, $-\pi < \theta \leq +\pi$, puis utiliser un développement en série en distinguant les cas $R > |w|$ et $R < |w|$. Ou encore invoquer la fonction $\mathrm{Log}(z/w)$.

5.4 Soit $0 < a < b$ sur l'axe réel positif et soit $C = \{|z| = r\}$ le cercle de rayon r centré en l'origine, parcouru dans le sens direct. Montrer :

$$\int_C \frac{1}{(z-a)(z-b)}\,dz = 2\pi i \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{1}{a-b} & a < r < b \\ 0 & r > b \end{cases}$$

On pourra réduire la fraction en élément simples, puis se ramener au résultat de l'exercice précédent. Ou encore, on pourra envisager des développements en séries, pour se ramener par étapes aux intégrales $\int_C z^n dz$, $n \in \mathbf{Z}$.

6

6.1 Soit C le cercle unité parcouru dans le sens direct. Calculer

$$\int_C \left(z + \frac{1}{z}\right)^n \frac{dz}{z} \quad (n \in \mathbf{N})$$

en développant par la formule du binôme et en utilisant les valeurs connues de $\int_C z^k dz$, $k \in \mathbf{Z}$. En déduire $\int_{-\pi}^{+\pi} \cos^n t\,dt$. En déduire la valeur de $\int_0^{\pi/2} \cos^n t\,dt$ pour n pair :

$$I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m} t\,dt = \frac{1.3.\cdots.(2m-1)}{2.4.\cdots.(2m)}\frac{\pi}{2}$$

6.2 On pose $J_m = \int_0^{\pi/2} \cos^{2m+1} t\,dt$, pour $m \in \mathbf{N}$. En intégrant par parties J_{m+1} obtenir la relation de récurrence $J_{m+1} = \frac{2m+2}{2m+3} J_m$ et prouver : [4]

$$J_m = \frac{2.4.\cdots.(2m)}{3.5.\cdots.(2m+1)}$$

4. par convention lorsque qu'un produit porte sur un ensemble vide il vaut 1. Donc la formule est bien compatible avec $J_0 = 1$. La remarque vaut aussi pour la formule précédente avec $I_0 = \pi/2$.

6.3 En utilisant $I_{m+1} \leq J_m \leq I_m$, obtenir :

$$\frac{2m+1}{2m+2}\frac{(1.3.\cdots.(2m-1))(3.5.\cdots.(2m+1))}{(2.4.\cdots.(2m))^2} \leq \frac{2}{\pi} \leq \frac{(1.3.\cdots.(2m-1))(3.5.\cdots.(2m+1))}{(2.4.\cdots.(2m))^2}$$

En déduire la formule de Wallis :

$$\frac{2}{\pi} = \lim_{m\to\infty} \frac{1.3}{2.2}\frac{3.5}{4.4}\cdots\frac{(2m-1).(2m+1)}{(2m).(2m)} = \prod_{m=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{4m^2}\right)$$

6.4 Justifier le réarrangement suivant (qui découle aussi du terme de gauche dans l'inégalité de l'exercice précédent) : $\frac{2}{\pi} = \frac{1}{2}\frac{3.3.5.5....}{2.4.4.6....} = \frac{1}{2}\prod_{m=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{(2m+1)^2}\right)^{-1}$, soit encore :

$$\frac{\pi}{4} = \prod_{m=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{(2m+1)^2}\right) .$$

6.5 Justifier également sur la base des formules précédentes les équivalents asymptotiques :

$$\binom{2m}{m} \sim_{m\to\infty} \frac{2^{2m}}{\sqrt{\pi m}}$$

$$\frac{(1+\frac{1}{2})(2+\frac{1}{2})\cdots(m+\frac{1}{2})}{1.2.\cdots.m} \sim 2\sqrt{\frac{m}{\pi}}$$

$$\frac{(\frac{1}{2})_m}{m!} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi m}}$$

7 Principe du Maximum

7.1 Soit f une fonction continue sur $\overline{D(0,1)}$, holomorphe sur $D(0,1)$, nulle sur le cercle de rayon 1. Montrer que f est identiquement nulle (cela découle quasi-immédiatement de l'énoncé du Principe du Maximum dans le polycopié).

7.2 (suite) Plus fort : on ne suppose plus que $f(e^{i\theta})$ est nulle pour tout θ mais seulement pour $0 \leq \theta \leq \pi$. Montrer que f est identiquement nulle. Indication : $f(z)f(-z)$.

7.3 (Lemme de Schwarz) Soit f une fonction holomorphe sur $D(0,1)$. On suppose $|f| \leq 1$ pour $|z| < 1$. Sous l'hypothèse supplémentaire $f(0) = 0$, montrer $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in D(0,1)$. Indication : appliquer le principe du maximum à la fonction $f(z)/z$ sur des cercles de rayon $\eta < 1$ et faire tendre η vers 1. Cas d'égalités ? Et si $f(0) = f'(0) = 0$?

7.4 Soit $\phi(z) = \frac{4z+3}{4+3z}$. Montrer : $\forall\theta \in \mathbf{R} \quad |\phi(e^{i\theta})| = 1$. En déduire $|z| < 1 \implies |\phi(z)| < 1$.

7.5 Prouver l'identité $|1 - \frac{1}{2}z|^2 - |\frac{1}{2} - z|^2 = \frac{3}{4}(1 - |z|^2)$ et justifier $|z| \leq 1 \implies \left|\frac{\frac{1}{2}-z}{1-\frac{1}{2}z}\right| \leq 1$. Soit f une fonction holomorphe sur $\overline{D(0,1)}$. On suppose $\forall z \ |f(z)| \leq 1$ et $f(\frac{1}{2}) = 0$. En considérant la fonction $g(z) = f\left(\frac{1-2z}{2-z}\right)$ montrer $|f(\frac{3}{4})| \leq \frac{2}{5}$.

7.6 Soit F une fonction entière telle que $|F(z)| \leq \frac{1}{n}$ pour $|z| = n$, $n \geq 1$. Montrer que F est identiquement nulle.

7.7 Soit F une fonction entière telle que $|F(z)| \leq \frac{1}{\log\log\log\log\log n}$ pour $|z| = 10^{10^{10^{10^{10^n}}}}$ et $n \geq 10!!!!!$. Montrer que F est identiquement nulle.

7.8 Montrer que si une fonction entière f a sa partie réelle bornée supérieurement alors elle est constante (considérer $\exp(f)$).

7.9 Soit f une fonction entière telle que $|f(z)| \leq M\,(1+|z|)^n$ pour un certain M et un certain $n \in \mathbf{N}$. Donner plusieurs démonstrations que f est un polynôme de degré au plus n :

- en utilisant une formule intégrale de Cauchy pour $f^{(n+1)}(z)$, avec comme contour les cercles de rayon R centrés en l'origine, ou en z si l'on veut,
- en utilisant les formules de Cauchy pour $f^{(m)}(0)$, avec $m \geq n+1$,
- en appliquant le théorème de Liouville à $(f(z) - P(z))/z^{n+1}$ avec P le polynôme de McLaurin-Taylor à l'origine à l'ordre n.

7.10 Soit f une fonction entière vérifiant $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = +\infty$. Donner plusieurs démonstrations que f est un polynôme :

- en montrant, par un théorème du cours, que $w = 0$ est une singularité polaire de $g(w) = f(\frac{1}{w})$, et en en déduisant qu'il existe un polynôme P tel que $f(z) - P(z)$ tende vers 0 pour $|z| \to \infty$, puis Liouville,
- ou en montrant que f n'a qu'un nombre fini de zéros z_j, $1 \leq j \leq n$, et en appliquant à $(z - z_1)\ldots(z - z_n)/f(z)$ le résultat de l'exercice précédent, plus quelques réflexions de conclusion pour achever la preuve.

7.11 (suite) Montrer que la fonction entière $z + e^z$ tend vers l'infini le long de tout rayon partant de l'origine. D'après l'exercice précédent $z + e^z$ est donc un polynôme. Commentaires ?

8 Séries de Laurent

8.1 Déterminer les séries de Laurent et les résidus à l'origine des fonctions suivantes :

1. $f(z) = \frac{1}{z}$
2. $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$
3. $f(z) = \frac{1}{z(z^2+1)}$

8.2 Déterminer la série de Laurent à l'origine de la fonction analytique $\exp(\frac{1}{z})$, et son résidu à l'origine. En $z_0 \neq 0$ quel est le résidu de cette fonction ?

8.3 Déterminer la partie singulière, le résidu, et le terme constant des séries de Laurent à l'origine pour les fonctions :

1. $f(z) = \frac{1}{\sin z}$
2. $f(z) = \frac{1}{\sin z - \operatorname{sh} z}$
3. $f(z) = \frac{1}{z\sin(z)\operatorname{sh}(z)}$

8.4 Déterminer les séries de Laurent de $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ dans chacune des trois couronnes ouvertes $0 < |z| < 1$, $1 < |z| < 2$, $2 < |z| < \infty$, ainsi que les séries de Laurent de f aux points 0, 1, 2, et 3. Quels sont les résidus en $z = 0$, $z = 1$, $z = 2$ et $z = 3$?

9 Lacets et indices

9.1 Montrer que tout lacet est homotopiquement trivial dans $\mathbf{C}$.

9.2 Montrer que lorsque γ est un lacet il existe R tel que $|z| > R \implies \mathrm{Ind}(\gamma, z) = 0$.

9.3 Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbf{C} \setminus \{0\}$ un lacet et soit $N \in \mathbf{Z}$ son indice par rapport à 0. En utilisant la discussion de la notion de variation de l'argument du cours, montrer qu'il existe une fonction continue $g : [0,1] \to \mathbf{C}$ telle que $\forall t \quad \gamma(t) = e^{g(t)}$ et $g(1) - g(0) = 2\pi i N$. Montrer que toute autre fonction continue G avec $\forall t \quad \gamma(t) = e^{G(t)}$ est de la forme $g + 2\pi i k$ pour un certain $k \in \mathbf{Z}$. On pose $h(t,u) = (1-u)\, 2\pi i N\, t + u g(t)$ puis $H(t,u) = e^{h(t,u)}$. Montrer que pour chaque $u \in [0,1]$ l'application $t \mapsto H(t,u)$ est un lacet. En déduire que le lacet $c_N(t) = e^{2\pi i\, N t}$ et γ sont homotopes dans $\mathbf{C} \setminus \{0\}$.

9.4 (suite) On considère le lacet obtenu en suivant d'abord c_N puis c_M. Montrer que ce lacet est homotope dans $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ au lacet c_{N+M} (il suffit de calculer son indice !).

9.5 On considère un lacet $\gamma : [a,b] \to \mathbf{C} \setminus \{0\}$ (donc ne passant pas par l'origine). On suppose qu'il n'existe qu'un nombre fini de $t \in [a,b]$ avec $\gamma(t) \in \Delta =]-\infty, 0[$. On les note $t_0 < t_1 < \cdots < t_N$. Pour simplifier on supposera que $\gamma(a)$ est sur Δ, donc $t_0 = a$ et $t_N = b$. Montrer que pour $t = t_j - \epsilon$, $\epsilon > 0$ suffisamment petit, le signe μ_j de $\mathrm{Im}(\gamma(t_j - \epsilon))$ ne dépend pas de ϵ, et de même pour le signe μ'_j de $\mathrm{Im}(\gamma(t_j + \epsilon))$ (préciser ce que l'on fait pour $j = 0$ et $j = N$). Si $\mu_j = +$ et $\mu'_j = -$ on dit que γ traverse Δ en $t = t_j$ dans le sens direct, si $\mu_j = -$ et $\mu'_j = +$ on dit que γ traverse Δ en $t = t_j$ dans le sens rétrograde. Sinon on dit que γ touche mais ne traverse pas Δ. En utilisant la relation entre la fonction $\mathrm{Log}(\gamma(t))$ et la variation de l'argument de $\gamma(t)$ sur chaque intervalle $]t_j, t_{j+1}[$, prouver $\Delta_{\gamma_j} \arg(z) = \pi(\mu_{j+1} - \mu'_j)$ avec $\gamma_j = \gamma$ restreint à $[t_j, t_{j+1}]$. En déduire que $\mathrm{Ind}(\gamma, 0)$ est égal au nombre de valeurs de t (a et b ne comptent que pour un seul) pour lesquelles γ traverse Δ, comptées positivement si la traversée est directe, négativement si la traversée est rétrograde. Dans la pratique vous pourrez utiliser n'importe quelle demi-droite issue de l'origine à la place de Δ à partir du moment où elle n'intersecte le lacet γ qu'en un nombre fini de points (si on n'impose pas au lacet d'être régulier, c'est-à-dire d'avoir un vecteur vitesse partout non nul, alors il peut rester figé en un même point un certain temps, et donc il faut modifier un petit peu la discussion ci-dessus qui suppose qu'il n'y a qu'un nombre fini de valeurs de t pour lesquels $\gamma(t)$ est sur la demi-droite).

9.6 On se donne deux lacets γ_1 et γ_2 dans $\mathbf{C}$ vérifiant

$$\forall t \quad |\gamma_2(t) - \gamma_1(t)| < |\gamma_1(t)|$$

Montrer que γ_1 et γ_2 ne passent pas par l'origine et sont homotopes dans $\mathbf{C} \setminus \{0\}$. En déduire que $\mathrm{Ind}(\gamma_1, 0) = \mathrm{Ind}(\gamma_2, 0)$. Montrer le même résultat sous l'hypothèse plus faible :

$$\forall t \quad |\gamma_2(t) - \gamma_1(t)| < |\gamma_1(t)| + |\gamma_2(t)|$$

10 Résidus

Note : une notation telle que $\int_{|z|=R} f(z)\, dz$ est utilisée pour l'intégrale le long du cercle de rayon R, dans le sens **direct**.

10.1 Justifier les formules du Cours : lorsque f présente en z_0 un pôle simple on a :

$$\mathrm{Rés}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

Lorsque f présente en z_0 un pôle d'ordre au plus N on a :

$$\text{Rés}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(N-1)!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{N-1} (z - z_0)^N f(z)$$

10.2 Soit g une fonction analytique ayant un zéro simple en z_0, et f une autre fonction analytique définie dans un voisinage de z_0. Montrer

$$\text{Rés}(\frac{f}{g}, z_0) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)} \; .$$

10.3 (suite) On suppose que g a un zéro d'ordre n : $g(z_0 + h) = h^n(c_0 + c_1 h + \dots)$, $c_0 \neq 0$, et l'on écrit $f(z_0 + h) = a_0 + a_1 h + \dots$. Montrer :

$$\text{Rés}(\frac{f}{g}, z_0) = e_{n-1}$$

avec e_0, e_1, …, obtenus par la division suivant les puissances croissantes (comme dans les calculs de développement limités) :

$$\frac{a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \dots}{c_0 + c_1 h + c_2 h^2 + \dots} = e_0 + e_1 h + e_2 h^2 + \dots \; .$$

10.4 Soit $0 < a < b < c$ et soit C le cercle de rayon r centré en l'origine, parcouru dans le sens direct. Calculer $\int_C \frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)} dz$ selon la valeur de r. On donnera deux preuves, soit en utilisant le théorème des résidus, soit en décomposant en éléments simples.

10.5 Soit Ω un domaine, de bord orienté le cycle $\partial\Omega$, comme dans la version classique B du théorème des résidus dans le polycopié. Soit f une fonction holomorphe sur $\overline{\Omega}$, soient z_1 et z_2 deux points de Ω. Que vaut

$$\int_{\partial\Omega} \frac{f(z)\, dz}{(z - z_1)(z - z_2)} \; ?$$

Qu'obtient-on pour $z_2 \to z_1$, z_1 fixé ?

10.6 Que vaut, en fonction de $R > 0$:

$$\int_{|z|=R} \frac{dz}{2z^2 - 5z + 2} \; ?$$

On précisera les valeurs exclues de R.

10.7 Déterminer, C désignant tour à tour le cercle $|z - i| = 1$, ou le cercle $|z + i| = 1$, ou encore $|z| = 2$, parcourus dans le sens direct, les valeurs des intégrales :

$$\int_C \frac{1}{z^2 + 1}\, dz$$

Même question pour :

$$\int_C \frac{1}{z^3 - 1}\, dz \qquad \text{et} \qquad \int_C \frac{1}{z^4 - 1}\, dz \qquad \text{et} \qquad \int_C \frac{1}{z^5 - 1}\, dz$$

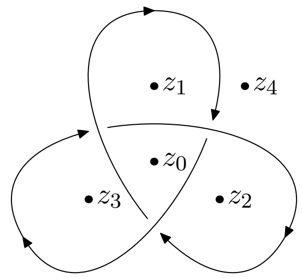
10.8 Que vaut $\int_{|z|=N} \mathrm{tg}(\pi z)\, dz$, pour $N \in \mathbf{N}$, $N \geq 1$?

10.9 Déterminer pour A, B, C réels, avec $A^2 > B^2 + C^2$ la valeur de

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{A + B\sin\theta + C\cos\theta}$$

On aura intérêt comme première étape à poser $B = R\cos\phi$, $C = R\sin\phi$.

10.10

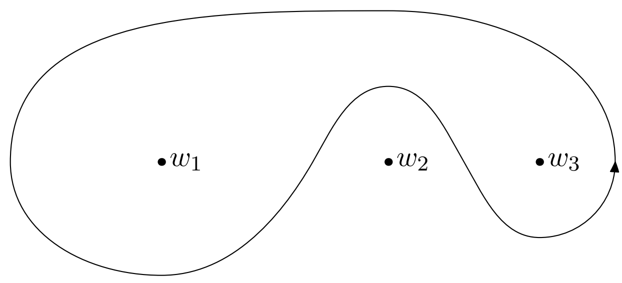


On considère dans le plan complexe un chemin fermé paramétré γ qui parcourt la figure ci-dessus dans le sens indiqué. Pour $j = 0, 1, 2, 3, 4$ on note

$$A_j = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_j} \quad \text{et} \quad B_j = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{(z - z_j)^2}$$

Déterminer, en le justifiant, les valeurs de A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, et de B_0, B_1, B_2, B_3, B_4. On précisera aussi quel est le nom que l'on donne aux quantités données par les intégrales A_j, $j = 0 \ldots 4$.

10.11



Soit γ le contour, parcouru dans le sens direct, dessiné ci-dessus. Déterminer (avec justification) en fonction de w_1, w_2, w_3 les intégrales suivantes :

$$A = \int_\gamma \frac{dz}{(z - w_1)(z - w_2)(z - w_3)}$$
$$B = \int_\gamma \sin(z) dz$$
$$C = \int_\gamma \frac{dz}{(z - w_1)^2(z - w_3)}$$

11 Nombres de Bernoulli

11.1 Montrer que la fonction $f(z) = \frac{z}{e^z-1}$, $f(0) = 1$ est analytique sur $(\mathbf{C} \setminus 2\pi i\mathbf{Z}) \cup \{0\}$. Que vaut $\lim_{z\to 2\pi i} |f(z)|$? Quel est le rayon de convergence de la série de Taylor de f en $z = 0$? On écrira dorénavant cette série sous la forme

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{z^k}{k!} ,$$

ce qui définit les nombres de Bernoulli [5] $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, ..., $B_{16} = -\frac{3617}{510}$, ...

11.2 Vérifier que $\frac{1}{e^z-1} + \frac{1}{2}$ est une fonction impaire et en déduire que les nombres de Bernoulli d'ordres impairs sont nuls, sauf B_1.

11.3 On se donne un paramètre $x \in \mathbf{C}$ quelconque et on considère la série de Taylor à l'origine de la fonction analytique $f(x,z) = \frac{ze^{xz}}{e^z-1}$. Quel est son rayon de convergence ? On écrit la série sous la forme :

$$\frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(x) \frac{z^k}{k!} .$$

Montrer que $B_k(x)$ est un polynôme unitaire de degré k que l'on explicitera en fonction des nombres de Bernoulli et des coefficients du binôme. En déduire, pour $k \geq 1$:

$$B_k'(x) = kB_{k-1}(x)$$

11.4 Prouver en utilisant la définition de $B_k(x)$:

$$B_k(x + 1) - B_k(x) = kx^{k-1}$$

Donner des formules pour les sommes $1^k + 2^k + \cdots + N^k$.

12 Divers

12.1 Montrer qu'il existe une (unique) fonction analytique sur $\mathbf{C}\setminus[-1,1]$ qui vaut $\sqrt{a^2-1}$ pour $a > 1$. Indication : montrer pour commencer que la formule $f(a) = \exp(\frac{1}{2}\operatorname{Log}(a-1) + \frac{1}{2}\operatorname{Log}(a+1))$ donne une solution sur l'ouvert $\mathbf{C}\setminus]-\infty,1]$. Puis montrer que $g(a) = -\exp(\frac{1}{2}\operatorname{Log}(-a-1) + \frac{1}{2}\operatorname{Log}(-a+1)) = -f(-a)$ est analytique sur $\mathbf{C} \setminus [-1,+\infty[$. Enfin montrer que $g(a) = f(a)$ dans le demi-plan supérieur et aussi dans le demi-plan inférieur en calculant $f(\pm i)$ et donc $g(\pm i)$ et en expliquant pourquoi a priori le quotient $g(a)/f(a)$ est constant dans ces deux demi-plans.

12.2 On considère la fonction analytique $\phi(a) = \operatorname{Log}(a-1) - \operatorname{Log}(a+1)$ dans le demi-plan supérieur et la fonction analytique $\psi(a) = \operatorname{Log}(a-1) - \operatorname{Log}(a+1)$ dans le demi-plan inférieur. Montrer que ϕ et ψ sont la restriction à leurs demi-plans respectifs d'une fonction analytique sur $\mathbf{C}\setminus[-1,+1]$. Indication : il y a plusieurs raisonnements possibles et plusieurs indications possibles. Donc, débrouillez vous.

5. Jacob (Jacques) Bernoulli 1654 Bâle - 1705 Bâle

12.3 (suite) On considère la fonction $a \mapsto \frac{a-1}{a+1}$. Quelle est l'image par cette fonction de l'intervalle $]-1,1[$? Quelle est l'image par cette fonction de $\mathbf{C} \setminus [-1,+1]$? En déduire que la fonction composée $\Phi(a) = \operatorname{Log} \frac{a-1}{a+1}$ existe et est analytique sur $\mathbf{C} \setminus [-1,+1]$. Retrouver le résultat de l'exercice précédent (et montrer que ϕ, ψ et Φ coïncident dans les intersections deux-à-deux de leurs ouverts de définitions).

12.4 (suite) Quel est le développement en série de Laurent de la fonction analytique Φ dans la couronne $1 < |a| < \infty$? Que vaut par exemple $\int_{|a|=2} \Phi(a) a^{18} da$?

12.5 Prouver pour $a > 1$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{a + \sin\theta} d\theta = \frac{\sqrt{a^2-1} - a}{\sqrt{a^2-1}}$$

En utilisant l'un des exercices précédents montrer que la formule a un sens et est valable pour $a \in \mathbf{C} \setminus [-1,+1]$.

12.6 (Résidu à l'infini) Soit f une fonction analytique pour $\{|z| > R\}$. On pose :

$$\text{Rés}(f,\infty) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} f(z) dz$$

avec C_r le cercle $\{|z| = r\}$ parcouru dans le sens direct. Montrer que le terme de droite est bien indépendant de $r > R$. On notera le signe $-$. On dit que $\text{Rés}(f,\infty)$ est le « résidu à l'infini » de f. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$ à l'exception d'un nombre fini de singularités isolées. Montrer le théorème suivant : *la somme de tous les résidus (y-compris celui à l'infini) de f est nulle.*

12.7 Soit f une fonction holomorphe sur $\overline{\Omega} \setminus \{z_1, \ldots, z_N\}$, avec Ω le domaine intérieur à une courbe de Jordan γ. Soit $g_n(z)$ la partie principale (partie singulière) de f en la singularité isolée z_n. Prouver **la formule intégrale générale de Cauchy** :

$$\forall z \in \Omega \setminus \{z_1, \ldots, z_N\} \qquad f(z) = \sum_{1 \le n \le N} g_n(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

Pour cela, remarquer d'abord $\text{Rés}(\frac{f(w)}{w-z}, z_n) = \text{Rés}(\frac{g_n(w)}{w-z}, z_n)$; puis montrer que le résidu à l'infini de la fonction $\frac{g_n(w)}{w-z}$ de $w \in \mathbf{C} \setminus \{z_n\}$, est nul. Utiliser l'exercice **12.6**.

13 Contours infinis

13.1 Confirmer par le calcul des résidus la valeur connue :

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$$

On appliquera le théorème des résidus au contour direct comportant le segment $[-R,+R]$ et le semi-cercle de rayon R dans le demi-plan supérieur, pour $R \to +\infty$.

13.2 Justifier $\int_{\mathbf{R}} \frac{e^{i\xi x}}{1+x^2} dx = \int_{\mathbf{R}} \frac{\cos(\xi x)}{1+x^2} dx$ pour $\xi \in \mathbf{R}$. Prouver par un calcul de résidu

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{e^{i\xi x}}{1+x^2} dx = \pi e^{-|\xi|} .$$

Suivant le cas $\xi \geq 0$ ou $\xi < 0$ on complètera le segment $[-R, +R]$ par un semi-cercle dans le demi-plan supérieur, ou inférieur, afin que la contribution du semi-cercle tende vers 0 pour $R \to \infty$. On peut aussi observer que l'intégrale est une fonction paire de ξ et que l'on peut donc se restreindre à $\xi \geq 0$.

13.3 Prouver, pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} e^{-i\xi x} (\pi e^{-|\xi|}) d\xi = \frac{1}{1+x^2} \,.$$

Il suffit d'évaluer séparément $\int_{-\infty}^{0}$ et $\int_{0}^{\infty}$ en utilisant le fait que exp est sa propre primitive (ce calcul n'utilise pas les techniques de la variable complexe). On remarquera que l'on retombe sur la fonction $1/(1+x^2)$, ce qui n'est pas un hasard (formule d'inversion pour l'intégrale de Fourier).

13.4 Déterminer

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{1+x^4}\,dx \qquad \int_{\mathbf{R}} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx \qquad \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{1+x^2+x^4}\,dx$$

13.5 Préciser pourquoi $\int_{\mathbf{R}} \frac{e^{i\xi x}}{1+x^4} dx$ est une intégrale convergente pour $\xi \in \mathbf{R}$, est une fonction réelle et paire de ξ, et utiliser un calcul de résidus pour établir, pour $\xi \geq 0$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\xi x)}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{2} e^{-\xi/\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right)$$

Cette formule est-elle valable pour $\xi < 0$?

13.6 Déterminer

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$$

Pour ce calcul, on considérera le contour allant le long de l'axe réel de 0 à R puis de R à jR le long d'un cercle puis de jR à 0 par un segment ($j = \exp(i\frac{2\pi}{3})$). On écrira d'une part chacune des trois contributions à l'intégrale de contour, en faisant attention au sens de parcours, et l'on utilisera d'autre part le théorème des résidus.

13.7 (suite) On note $J(w)$, pour $|w| = 1$ et en excluant certaines valeurs spéciales de w (que l'on précisera), l'intégrale $\int \frac{dz}{1+z^3}$ prise le long du segment infini $w\mathbf{R}^+$ (de 0 vers $w\infty$). Déterminer $J(w)$ en fonction de w.

13.8 (Morceaux de Résidus) Soit f avec en z_0 un **pôle simple**. Soit $C_r(\alpha, \beta)$ l'arc de cercle $w = z_0 + re^{i\theta}$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, dans le sens direct des θ et avec $0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$. Prouver :

$$\lim_{r \to 0} \int_{C_r(\alpha,\beta)} f(z)\,dz = 2\pi i \,\frac{\beta - \alpha}{2\pi}\, \text{Rés}(f, z_0)$$

Que se passe-t-il si le pôle est d'ordre plus élevé ?

13.9 (Lemme de Jordan) Soit f une fonction définie et continue sur le domaine $\{\text{Im}(z) > 0, |z| > R\}$, ou seulement sur une suite de demi-cercles $\{\text{Im}(z) > 0, |z| = R_n\}$ de rayons tendant vers l'infini. On suppose $\lim_{\substack{|z| \to \infty \\ \text{Im}(z) > 0}} |f(z)| = 0$ (ou $\lim_{n \to \infty} \sup_{\text{Im}(z) > 0,\, |z| = R_n} |f(z)| = 0$.)

Montrer (on utilisera $\sin(\theta) \geq \frac{2}{\pi}\theta$ pour $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) :

$$\lim_{R \to \infty} \int_{z = Re^{i\theta},\, 0 < \theta < \pi} f(z) e^{iz}\,dz = 0 \qquad \text{(ou l'analogue avec les } R_n)$$

13.10 En considérant l'intégrale de $\frac{e^{iz}}{z}$ sur un contour allant de $-R$ à $+R$ le long de l'axe réel en contournant 0 par un petit demi-cercle, puis qui revient de $+R$ à $-R$ par le demi-cercle dans le demi-plan supérieur, démontrer $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

13.11 Déterminer les intégrales (semi-convergentes) de Fresnel $\int_0^\infty \cos(x^2)dx$ et $\int_0^\infty \sin(x^2)dx$ en considérant l'intégrale de $\exp(-z^2)$ sur le contour $z = x$, $0 \leq x \leq R$, $z = R\exp(i\theta)$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$, $z = xe^{i\frac{\pi}{4}}$, $R \geq x \geq 0$. On rappelle l'identité $\int_{\mathbf{R}} \exp(-\pi u^2)du = 1$.

13.12 Que vaut $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt$? (faire un changement de variable $t = \pi u^2$ pour se ramener à la Gaussienne). En considérant un contour passant par l'axe réel, puis un quart de cercle, puis l'axe imaginaire, puis un petit quart de cercle évitant l'origine prouver :

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt = \exp(i\frac{\pi}{4}) \int_0^\infty \frac{e^{-ix}}{\sqrt{x}}dx$$

et en déduire les valeurs des intégrales $\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$ et $\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ (qui ne sont que semi-convergentes). Comparer aux intégrales de Fresnel.

13.13 Reprendre l'exercice précédent et déterminer pour $0 < a < 1$ les valeurs des intégrales (semi-convergentes)

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^a}dx \qquad \text{et} \qquad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^a}dx$$

en utilisant la fonction Gamma. À propos prouver que ces intégrales ne sont que semi-convergentes (*i.e.* pas absolument convergentes).

14 Développement de $\frac{\pi}{\sin \pi z}$ et produit infini de Euler

Le but de cette section et de la suivante est d'établir les deux formules importantes :

$$\forall z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{Z} \quad \frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + \lim_{\substack{N\to+\infty \\ M\to+\infty}} \sum_{\substack{-M\leq n\leq N \\ n\neq 0}} \frac{(-1)^n}{z-n} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2z}{z^2-n^2}$$

$$\forall z \in \mathbf{C} \qquad \sin(\pi z) = \lim_{N\to\infty} \pi z \prod_{n=1}^{N}(1 - \frac{z^2}{n^2})$$

14.1 Montrer la convergence de la série $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{z-n}$ (regarder les sommes partielles pour les indices pairs).

14.2 (suite) On pose $f(w) = \frac{\pi}{\sin \pi w}$. Soit $z \notin \mathbf{Z}$ fixé, soit $N > |z| - \frac{1}{2}$ et $\mathcal{R}_N$ le carré $\{|x| \leq N + \frac{1}{2}, |y| \leq N + \frac{1}{2}\}$, et $C_N = \partial\mathcal{R}_N$ son bord parcouru dans le sens direct. Exprimer $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_N} \frac{f(w)}{w-z}dw$ à l'aide du Théorème des résidus.

14.3 (suite) Montrer $\int_{C_N} \frac{f(w)}{w}dw = 0$ (on notera que f est impaire) et en déduire

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_N} \frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_N} \frac{\pi}{\sin \pi w}\frac{z}{w(w-z)}dw$$

14.4 (suite) On rappelle l'identité $\sin(w) = \sin(x)\,\mathrm{ch}(y) + i\cos(x)\,\mathrm{sh}(y)$ pour $w = x + iy$. Montrer $|\sin w|^2 = \sin^2 x + \mathrm{sh}^2\, y$ $(x, y \in \mathbf{R}\dots)$. En déduire $|\sin(\pi w)| = \mathrm{ch}(\pi y) \geq 1$ sur les bords verticaux du carré et $|\sin(\pi w)| \geq \mathrm{sh}(\pi(N + \frac{1}{2})) \geq \mathrm{sh}(\pi\frac{1}{2}) = 2.301\cdots \geq 1$ sur les bords horizontaux. Conclure la preuve de

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

avec convergence uniforme pour $|z|$ borné.

14.5 (suite) Reprendre la même technique et prouver :

$$\forall z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{Z} \quad \frac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \lim_{N\to\infty} \sum_{-N \leq n \leq N} \frac{1}{z - n} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}\ ,$$

avec convergence uniforme pour $|z|$ borné.

On veut maintenant prouver : $\sin(\pi z) = \lim_{N\to\infty} \pi z \prod_{n=1}^{N}(1 - \frac{z^2}{n^2})$ On fixe une fois pour toutes $R > 0$, et on va montrer la formule pour $|z| < R$.

14.6 Soit N avec $N > R$ et notons $f_N(z) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} \prod_{n=1}^{N}(1 - \frac{z^2}{n^2})$, prolongé par continuité en les n, $|n| \leq N$. Montrer que f_N est holomorphe et ne s'annule pas sur $D(0, R)$.

14.7 (suite) Soit $\gamma : [0, 1] \to \mathbf{C}^*$ le chemin $\gamma(t) = f_N(tz)$. On a donc $\gamma(0) = 1$, $\gamma(1) = f_N(z)$, et $\gamma(t) \neq 0$ pour tout t. Par un théorème démontré en cours (lequel ?) on a $\gamma(1) = \gamma(0) \exp\left(\int_\gamma \frac{dw}{w}\right)$. En déduire $f_N(z) = \exp\left(\int_0^1 \frac{f_N'(tz)}{f_N(tz)} z\,dt\right)$

14.8 (suite) Soit $\epsilon > 0$. En utilisant la convergence uniforme pour $|z|$ borné du développement en fractions de $\pi\,\mathrm{cotg}(\pi z)$, montrer que pour N suffisamment grand on a $|f_N'(w)| \leq \epsilon |f_N(w)|$ pour tout $w \in D(0, R)$, puis en déduire

$$N \gg 0 \quad |z| < R \implies \quad |f_N(z)| \leq e^{\epsilon|z|} \leq e^{\epsilon R}$$

14.9 (suite) En déduire $\lim_{N\to\infty} f_N(z) = 1$, uniformément sur $D(0, R)$. Conclure la preuve du produit infini de Euler pour $\sin(z)$.

15 Produits infinis

Au cas où je ne l'ai pas rédigé dans le polycopié j'explique ce qu'il y a à savoir : on écrit $L = \prod_{n=1}^{\infty} q_n$ si $L = \lim_{N\to\infty} q_1 q_2 \cdots q_N$. Supposons tous les q_n non nuls. On dira que le « produit infini converge » si, non seulement L existe, mais de plus $L \neq 0$. On démontre (ce n'est pas évident avec des q_n complexes, ou négatifs, et je vous conseille fortement d'y réfléchir) que c'est le cas si et seulement si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Log}\, q_n$ est convergente (par convention $\mathrm{Log}(-1) = +i\pi$). Lorsque certains des q_n sont nuls, on dit que le produit converge si il existe N avec $q_n \neq 0$ pour $n \geq N$ et si $\prod_{n=N}^{\infty} q_n$ converge. Lorsque le produit converge on a nécessairement (pourquoi ?) $\lim q_n = 1$ (c'est nécessaire, pas suffisant). Nous travaillerons principalement avec des produits « absolument convergents » :

15.1 (Produit absolument convergent) Soit u_n, $n \geq 1$ des nombres complexes. Montrer : $1 + \sum_{n=1}^{N} |u_n| \leq \prod_{n=1}^{N}(1 + |u_n|) \leq e^{\sum_{n=1}^{N} |u_n|}$. En déduire que la suite croissante $\prod_{n=1}^{N}(1+$

$|u_n|)$ a une limite finie si et seulement si $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| < \infty$. On suppose maintenant être dans ce cas, et de plus $\forall n\ 1 + u_n \neq 0$. Montrer alors $\sum_{n=1}^{\infty} |\operatorname{Log}(1 + u_n)| < \infty$, et en déduire que $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + u_n)$ converge. On conviendra donc de dire que $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + u_n)$ est « absolument convergent » si $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| < \infty$, et on vient donc de prouver qu'un produit absolument convergent est convergent. C'est principalement, la seule chose que vous ayez à savoir sur ce sujet.

15.2 Pour quelles valeurs de p (réel) $\prod_{k=1}^{\infty}(1 + k^{-p})$ converge ?

15.3 Étant admis que $\sin(\pi z) = \pi z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)$, prouver :

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{k}\right) e^{\frac{z}{k}}$$

et justifier la convergence absolue du produit.

15.4 Étant admis $\sin(\pi z) = \pi z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)$, prouver :

$$\sin(\pi z) = \pi z \lim_{N\to\infty} \prod_{k=-N, k\neq 0}^{+N} \frac{z-k}{-k} ,$$

puis établir pour tout $\alpha \notin \mathbf{Z}$:

$$\sin(\pi(z - \alpha)) = -\sin(\pi\alpha) \lim_{N\to\infty} \prod_{k=-N}^{+N} \left(1 - \frac{z}{\alpha + k}\right)$$

Montrer que le résultat reste valable si l'on remplace dans le produit $-N$ par $-N \pm 1$ ou $+N$ par $+N \pm 1$. En déduire :

$$\cos(\pi z) = \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(\frac{1}{2} + k)^2}\right)$$

avec un produit absolument convergent.

15.5 (suite) On rappelle la formule $\pi \operatorname{cotg}(\pi\alpha) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{+N} \frac{1}{\alpha-k}$, pour $\alpha \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}$. Montrer :

$$\frac{\sin(\pi(\alpha - z))}{\sin(\pi\alpha)} = e^{-\pi \operatorname{cotg}(\pi\alpha) z} \prod_{k=-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha + k}\right) e^{\frac{z}{\alpha+k}}$$

avec un produit absolument convergent.

15.6 Établir la convergence et évaluer les produits infinis suivants :

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right) \qquad \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right)$$

$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} \qquad \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n^2}$$

Les trois premiers s'obtiennent par des réarrangements simples. Pour le dernier, utiliser le produit infini de $\sin z$.

15.7 On suppose $\sum_{n\geq 1} |u_n|^2 < \infty$. Montrer que les deux séries $\sum u_n$ et $\sum \mathrm{Log}(1+u_n)$ sont soit toutes deux convergentes soit toutes deux divergentes (on suppose $\forall n\ u_n \neq -1$). Donc si $\sum_{n\geq 1} |u_n|^2 < \infty$ le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ est convergent si et seulement si la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge.

15.8 (suite) Montrer que $\prod_{k=1}^{\infty}(1+\frac{i}{k})$ diverge tandis que $\prod_{k=1}^{\infty}\left|1+\frac{i}{k}\right|$ converge.

16 Problème

16.1 Prouver pour $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}$$

en utilisant le secteur angulaire $0 \leq \mathrm{Arg}\, z \leq \frac{2\pi}{n}$, $0 \leq |z| \leq R$, $R \to +\infty$, et en montrant que la contribution de l'arc de cercle tend vers zéro pour $R \to +\infty$.

16.2 (suite) Montrer, en utilisant les contours $\epsilon \leq x \leq R$, $z = Re^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{a})$, $z = re^{i\frac{2\pi}{a}}$ $(R \geq r \geq \epsilon)$, $z = \epsilon e^{i\theta}$ $(\frac{2\pi}{a} \geq \theta \geq 0)$:

$$a \in \mathbf{R},\ a > 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^a} = \frac{\pi/a}{\sin(\pi/a)}\ .$$

Pour définir z^a comme fonction holomorphe sur $\{z = re^{i\alpha}\,|\,0 < r < \infty,\ 0 \leq \alpha \leq \frac{2\pi}{a}\}$, on pose $z^a = r^a e^{a\,i\alpha} = \exp(a(\log r + i\alpha))$ (car $\log r + i\alpha = \mathrm{Log}(ze^{-i\frac{\pi}{a}}) + \frac{\pi}{a}$; no comments).

16.3 (suite) Soit $J(a) = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^a}$; justifier que l'intégrale définissant $J(a)$ est convergente et analytique comme fonction de a pour $\mathrm{Re}(a) > 1$ et prouver $J(a) = \frac{\pi/a}{\sin(\pi/a)}$.

16.4 (suite) On définit maintenant

$$K(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{pt}}{1+e^t} dt$$

pour $0 < p < 1$. Justifier les identités (pour $0 < p < 1$) :

$$K(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{pt}}{1+e^t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{1+t} dt = \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^{1/p}} = \frac{1}{p}J(\frac{1}{p}) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$$

16.5 (suite) Expliquer pourquoi l'intégrale $K(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{pt}}{1+e^t} dt$ est convergente et analytique pour p complexe avec $0 < \mathrm{Re}(p) < 1$ et établir la formule $K(p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$ pour $0 < \mathrm{Re}(p) < 1$.

16.6 (suite) Donner une preuve simple directe de la formule $K(p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$ pour tout p complexe avec $0 < \mathrm{Re}(p) < 1$ en appliquant le théorème des résidus avec des contours liés aux droites $z = x$, $x \in \mathbf{R}$ et $z = x + 2\pi i$, $x \in \mathbf{R}$.

16.7 (suite) Déduire de ce qui précède avec $p = \frac{1}{2} + i\xi$, $\xi \in \mathbf{R}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\xi t)}{\mathrm{ch}(t/2)} dt = \frac{2\pi}{\mathrm{ch}(\pi\xi)} \ ,$$

Montrer que la transformation de Fourier $\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}} e^{2\pi i \xi x} f(x)\, dx$ appliquée à la fonction $f(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}(\pi x)}$ donne simplement $\widehat{f} = f$ (remarque : c'est aussi le cas avec $f(x) = e^{-\pi x^2}$).

16.8 (suite) On revient à la formule générale $K(p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$. En séparant parties réelles et imaginaires dans $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{pt}}{1+e^t} dt$ déterminer (en simplifiant le plus possible) les valeurs de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ut}\cos(vt)}{1+e^t} dt \qquad , \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ut}\sin(vt)}{1+e^t} dt \ ,$$

pour $0 < u < 1$, $v \in \mathbf{R}$.

17 Divers

17.1 Soient f et g deux fonctions entières avec $\forall z\ f(z)g(z) = 0$. Montrer que l'une des deux est identiquement nulle. Reprendre l'exercice pour des fonctions holomorphes sur un ouvert U. La conclusion est-elle inchangée ?

17.2 Soit $U = \{1 < |z| < 2\}$ et soit $f : U \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. On note $u = \mathrm{Re}(f)$ et $v = \mathrm{Im}(f)$.

1. Quelles sont les équations de Cauchy-Riemann ? Montrer que u vérifie l'équation de Laplace :
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$
2. On suppose que l'on peut écrire $u(x,y) = \psi(x^2+y^2)$ pour une certaine fonction $\psi :]1,4[\to \mathbf{R}$, de classe C^2. Montrer
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\psi'(x^2+y^2) + 4x^2\psi''(x^2+y^2) \ ,$$
et donner la formule analogue pour $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.
3. En déduire que ψ vérifie l'équation différentielle :
$$\psi'(t) + t\psi''(t) = 0 \qquad \text{sur }]1,4[\ .$$
Quelle est la dérivée de $t\psi'(t)$? Prouver qu'il existe deux constantes C et A avec $\psi(t) = C\log(t) + A$.
4. Que valent $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, et $\frac{\partial v}{\partial y}$? Prouver (on utilisera $f'(z) = \frac{\partial}{\partial x} f$) :
$$f'(z) = \frac{2C}{x+iy}$$
5. Compte tenu de la question précédente que vaut $\int_{|z|=\frac{3}{2}} f'(z)\, dz$, le cercle étant parcouru dans le sens direct ? Prouver alors $C = 0$. En déduire que f est constante.

6. On suppose maintenant que U est $\{1 < |z| < 2\} \setminus]-2,-1[$. Existe-t-il une fonction holomorphe *non constante* $f : U \to \mathbf{C}$ telle que $\mathrm{Re}(f)$ soit une fonction de x^2+y^2 ? (Justifier)

17.3 Déterminer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(2+e^{ix})}\,dx$.

17.4 Déterminer $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix}\,\frac{x-i}{x+i}\,\frac{1}{x^2+1}\,dx$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix}\,\frac{x-i}{x+i}\,\frac{1}{x^2+1}\,dx$.

17.5 Déterminer $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x(x^2+1)}\,dx$.

17.6 Montrer que les racines du polynôme $P(z) = z^{111} + 3z^{50} + 1$ vérifiant $|z| < 1$ sont simples et qu'il y en a exactement 50. Ind. : utiliser le théorème de Rouché en écrivant $P(z) = 3z^{50} + (z^{111} + 1)$. Calculer P' pour s'assurer que les racines avec $|z| < 1$ sont simples.

17.7 Déterminer l'image par $z \mapsto \frac{3z+5}{z+2}$ du cercle unité, du cercle de rayon 2 centré en 1, du cercle de rayon 2 centré en l'origine; de la droite imaginaire, de la droite d'équation $x = y$, de la droite verticale passant en 3, de la droite verticale passant en -2.

17.8 Soit f holomorphe sur $\overline{D(0,1)}$. On suppose $|f(w)| \le 8$ pour tout $|w| \le 1$ et $f(\frac{3}{4}) = 0$. Montrer $|f(0)| \le 6$. Indication : trouver un automorphisme ϕ du disque avec $\phi(0) = \frac{3}{4}$ et utiliser le Lemme de Schwarz pour la fonction $\frac{1}{8}f(\phi(z))$. Trouver le z avec $\phi(z) = 0$.

17.9 (Un théorème de Cauchy) Soit f une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ avec des pôles simples a_n, $0 \le n < N$, en nombre fini ou infini ($N = \infty$), de résidus α_n. On suppose de plus qu'il existe une suite croissante R_m, $R_m \to +\infty$, telle que sur les cercles $\{|z| = R_m\}$ on ait $|f(z)| \le C \cdot R_m^k$, pour deux constantes C et k, $k \in \mathbf{N}$. On suppose que l'origine n'est pas parmi les pôles simples. Redémontrer pour vous échauffer la formule de l'exercice 12.7

$$|z| < R_m \Rightarrow \qquad f(z) = \sum_{|a_n|<R_m} \frac{\alpha_n}{z-a_n} + \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R_m} \frac{f(w)}{w-z}dw$$

puis, en notant $P_n(z)$ le polynôme de Taylor de $\alpha_n/(z-a_n)$ à l'origine à l'ordre k, et $P(z)$ celui de f, en déduire :

$$P(z) = \sum_{|a_n|<R_m} P_n(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R_m} f(w)\left(\sum_{0\le j\le k} \frac{z^j}{w^{j+1}}\right) dw$$

Le nombre complexe z étant fixé, montrer :

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R_m} f(w)\left(\frac{1}{w-z} - \sum_{0\le j\le k}\frac{z^j}{w^{j+1}}\right) dw = 0\,,$$

la convergence étant uniforme pour $|z|$ borné. Conclure :

$$\forall z \in \mathbf{C}\setminus\{a_n, 0\le n<N\} \qquad f(z) = P(z) + \lim_{m\to\infty}\sum_{|a_n|<R_m}\left(\frac{\alpha_n}{z-a_n} - P_n(z)\right)\,,$$

la convergence étant uniforme pour $|z|$ borné.

Total : 128 exercices. Version du 22 décembre 2006.

