Université Lille 1 — UFR de Mathématiques
Licence de Mathématiques (L3, S5, année 2006–2007)

M305 (Variables Complexes)
CORRIGÉ de l'Examen du 16 janvier 2007

(3 pts) **1.** Déterminer les rayons de convergence

(a) de $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-n^2} z^{7n}$,

(b) et de $\sum_{n=1}^{\infty}(9^{3n}+4^{5n})z^{2n}$. Pour cela on commencera par se demander qui de 9^3 ou de 4^5 est le plus grand ! (et on les mettra sous la forme de carrés).

Corr. : Soit $u_n = (-1)^n e^{-n^2} z^{7n}$. Pour $z \neq 0$ on a $|u_n| = e^{-n^2+7n\log(|z|)}$.
On a $\lim_{n\to\infty}(-n^2+7n\log(|z|)) = -\infty$ donc $\lim_{n\to\infty}|u_n| = 0$. Cela, en soit, ne garantit pas a priori la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, mais a posteriori si, car cela étant valable pour tout z prouve que le rayon de convergence R est infini : on sait en effet que si R est fini alors pour $|z| > R$ le terme général u_n de la série entière n'est pas borné. Deuxième méthode : toujours pour $z \neq 0$ on étudie $|u_{n+1}|/|u_n| = e^{-2n-1}|z|^7$. On constate que $\lim_{n\to\infty}|u_{n+1}|/|u_n| = 0$. La série $\sum u_n$ est donc convergente, et ceci quel que soit z. On conclut à nouveau que le rayon de convergence est infini.

Pour la série $\sum_{n=1}^{\infty}(9^{3n}+4^{5n})z^{2n}$, on commence par observer que $9^{3n} = (9^3)^n$, $4^{5n} = (4^5)^n$. Et $9^3 = (3^2)^3 = (3^3)^2 = 27^2$ et $4^5 = (2^2)^5 = (2^5)^2 = 32^2$. La série en question est donc aussi $\sum_{n=1}^{\infty}(27^{2n}+32^{2n})z^{2n}$. Posons $u_n = (27^{2n}+32^{2n})z^{2n}$. Pour $z \neq 0$, on a $|u_n| \sim_{n\to\infty} 32^{2n}|z|^{2n}$ pour $n \to \infty$ puisque $32 > 27$. Par conséquent $\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = 32^2|z|^2$. Cette limite est > 1 si $|z| > \frac{1}{32}$ et la série est alors divergente. La limite est < 1 si $|z| < \frac{1}{32}$ et la série est donc convergente. En conclusion le rayon de convergence est $\frac{1}{32}$.

(4 pts) **2.** Soit $f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+2}$. Déterminer les développements de f en série de Laurent :

(a) pour $0 < |z| < 1$,

(b) pour $1 < |z| < 2$,

(c) et pour $|z| > 2$.

Soit C le cercle de centre $\frac{-3}{2}$ et de rayon 1. Que vaut $\int_C f(z)\,dz$?

Corr. : Pour $0 < |z| < 1$ on a $\frac{1}{1+z} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^k$ et $\frac{1}{2+z} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^k/2^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^k/2^{k+1}$. Donc $f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(1+2^{-k-1})z^k$, qui est le développement demandé.
Pour $1 < |z| < 2$, on a le même développement de $\frac{1}{z+2}$ mais par contre $\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{-k-1} = \sum_{k\leq -1}(-1)^{k+1}z^k$. Le développement de Laurent est donc $\sum_{k\leq -2}(-1)^{k+1}z^k + \frac{2}{z} + \sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{2^{k+1}}z^k$.

Pour $|z| > 2$ on aura $\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k 2^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k 2^k z^{-k-1}$, ce qui donne $\sum_{k\leq -1}(-1)^{k+1}2^{-k-1}z^k$. Donc $f(z) = \sum_{k\leq -2}(-1)^{k+1}(1+2^{-k-1})z^k + \frac{3}{z}$ pour $|z| > 2$. Le cercle C entoure une fois dans le sens positif les singularités en -1 et en -2. On a $\text{Rés}(f,-1) = \lim_{z\to -1}(z+1)f(z) = 1$ et $\text{Rés}(f,-2) = \lim_{z\to -2}(z+2)f(z) = 1$. Donc $\int_C f(z)\,dz = 2\pi i(1+1) = 4\pi i$.

(4 pts) **3.** Déterminer les singularités et les résidus dans $\mathbf{C}$ de $f(z) = \frac{1}{(z^2-2z+2)(z^2+1)}$. Puis trouver la valeur de $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2-2x+2)(x^2+1)}$.

Corr. : $z^2 - 2z + 2 = (z-1)^2 + 1 = (z-1-i)(z-1+i)$. Les singularités sont donc $z_1 = 1+i$, $z_2 = 1-i$, $z_3 = i$ et $z_4 = -i$. On a $\text{Rés}(f, z_1) = \text{Rés}(\frac{1/(z^2+1)}{z^2-2z+2}, z_1) = \frac{1}{z_1^2+1}\frac{1}{2z_1-2} = \frac{1}{2i+1}\frac{1}{2i} = \frac{1}{-4+2i} = -\frac{4+2i}{20} = \frac{-1}{5} + \frac{-1}{10}i$. Et $\text{Rés}(f, z_2) = \text{Rés}(\frac{1/(z^2+1)}{z^2-2z+2}, z_2) = \frac{1}{z_2^2+1}\frac{1}{2z_2-2} = \frac{1}{-2i+1}\frac{1}{-2i} = \frac{1}{-4-2i} = \frac{-1}{5} + \frac{1}{10}i$. Par ailleurs $\text{Rés}(f, z_3) = \frac{1}{(i^2-2i+2)}\frac{1}{2i} = \frac{1}{4+2i} = \frac{1}{5} - \frac{1}{10}i$. Et $\text{Rés}(f, z_4) = \frac{1}{((-i)^2+2i+2)}\frac{1}{-2i} = \frac{1}{4-2i} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10}i$.
Soit γ_R, pour $R > 3$ (de sorte que $R^2 - 2R - 2 > 3R - 2R - 2 = R - 2 > 0$) , le contour $[-R, R] \cup C_R$, parcouru dans le sens direct, avec C_R le demi-cercle de rayon R, de centre 0, dans le demi-plan supérieur. Par le théorème des résidus $\int_{-R}^{+R} f(z)\,dz + \int_{C_R} f(z)\,dz = 2\pi i(\text{Rés}(f, z_1) + \text{Rés}(f, z_3)) = 2\pi i(-2\frac{1}{10}i) = \frac{2\pi}{5}$. Et

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \leq \pi R\frac{1}{(R^2-2R-2)(R^2-1)} \to_{R\to\infty} 0$$

L'intégrale demandée est $\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{+R} f(z)\,dz$ et vaut donc $\frac{2\pi}{5}$.

(2 pts) **4.** Que vaut $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\pi x}}{x^2+2x+2}\,dx$?

Corr. : On a $z^2 + 2z + 2 = (z+1)^2 + 1 = (z+1-i)(z+1+i)$. Soit γ_R, pour $R > 3$ (de sorte que $R^2 - 2R - 2 > 3R - 2R - 2 = R - 2 > 0$) , le contour $[-R, R] \cup C_R$, parcouru dans le sens direct, avec C_R le demi-cercle de rayon R, de centre 0, dans le demi-plan supérieur. Par le théorème des résidus on a

$$\begin{aligned}\int_{-R}^{+R}\frac{e^{i\pi x}}{x^2+2x+2}\,dx + \int_{C_R}\frac{e^{i\pi z}}{z^2+2z+2}\,dz &= 2\pi i\ \text{Rés}(\frac{e^{i\pi z}}{z^2+2z+2}, -1+i)\\ &= 2\pi i\left(\frac{e^{-i\pi-\pi}}{2(-1+i)+2}\right) = -\pi e^{-\pi}\end{aligned}$$

Par ailleurs, dans le demi-plan supérieur on a $|e^{i\pi z}| \leq 1$ donc

$$\left|\int_{C_R}\frac{e^{i\pi z}}{z^2+2z+2}\,dz\right| \leq \pi R\frac{1}{R^2-2R-2} \to_{R\to\infty} 0$$

L'intégrale demandée vaut donc $-\pi e^{-\pi}$.

(3 pts) **5.** Soit $\sum_{k=0}^{\infty} c_k h^k$ la série de Taylor de $\frac{1}{(2i+h)^5}$ en zéro. Trouver ce que valent c_0, c_1, c_2, c_3 et c_4. Puis, déterminer la valeur de $A = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^5}$.

<u>Corr.</u> : On a ici une série binomiale de Newton, $\frac{1}{(2i+h)^5} = (2i)^{-5}(1-i\frac{h}{2})^{-5}$, c'est-à-dire :

$$-\frac{i}{32}\left(1+5i\frac{h}{2}+\frac{5\cdot 6}{2}(i\frac{h}{2})^2+\frac{5\cdot 6\cdot 7}{6}(i\frac{h}{2})^3+\frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{24}(i\frac{h}{2})^4+\dots\right)$$

$$=-\frac{i}{32}\left(1+\frac{5i}{2}h-\frac{15}{4}h^2-i\frac{35}{8}h^3+\frac{35}{8}h^4+\dots\right)$$

Donc $c_0 = -\frac{i}{32}$, $c_1 = \frac{5}{64}$, $c_2 = i\frac{15}{128}$, $c_3 = -\frac{35}{256}$ et $c_4 = -i\frac{35}{256}$.
Posons $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^5}$. Dans le demi-plan supérieur l'unique singularité est en $z = i$. Sur le demi-cercle C_R de rayon $R > 1$ dans le demi-plan supérieur on a $|f(z)| \le (R^2-1)^{-5}$. Donc $\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \le \pi R(R^2-1)^{-5}$ tend vers 0 pour $R \to \infty$. La valeur de A est donc $2\pi i$ Rés(f,i). Pour déterminer ce résidu, posons $z = i+h$. Alors $z^2+1 = 2ih+h^2 = h(2i+h)$ et la série de Laurent de $f(z)$ au point i est $h^{-5}\sum_{k=0}^{\infty} c_k h^k$. Le résidu est donc $c_4 = -i\frac{35}{256}$.
Ainsi

$$A = \frac{35\pi}{128}$$

(3 pts) **6.** Soit $P(z) = z^5 + z^4 + \frac{1}{14}$.

points négatifs si non-réponse ou réponse fausse→

1. établir $\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{10}{56}$, $\sqrt[4]{\frac{1}{14}} < \frac{1}{\sqrt{2}}$, et $\frac{4}{5} > \frac{1}{\sqrt{2}}$.
2. Soit C le cercle de centre zéro et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Montrer $|z^4 + \frac{1}{14}| \ge \frac{10}{56} > |z^5|$ pour $z \in C$. En déduire en invoquant le théorème de Rouché (et en examinant P') que P a exactement quatre racines distinctes vérifiant $|z| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ (et aucune sur C).
3. Soit Z l'unique racine de P avec $|Z| > \frac{1}{\sqrt{2}}$. En invoquant à nouveau le théorème de Rouché d'une manière appropriée établir $|Z| < 1 + \frac{1}{14}$. On aura montré $(1+\frac{1}{14})^5 > (1+\frac{1}{14})^4 + \frac{1}{14}$.

<u>Corr.</u> : $\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{10}{56} \iff 14 < \sqrt{2}\cdot 10 \iff 196 < 200$. Et $\sqrt[4]{\frac{1}{14}} < \frac{1}{\sqrt{2}} \iff \frac{1}{14} < (\frac{1}{\sqrt{2}})^4 = \frac{1}{4}$. Et $\frac{4}{5} > \frac{1}{\sqrt{2}} \iff 16 > \frac{1}{2}25$.
Pour $|z| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ on a $|z^4 + \frac{1}{14}| \ge (\frac{1}{\sqrt{2}})^4 - \frac{1}{14} = \frac{1}{4} - \frac{1}{14} = \frac{10}{56}$. Sur C on a $|z^5| = \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{10}{56}$ donc par le théorème de Rouché $(z^4 + \frac{1}{14}) + z^5$ a exactement autant de racines a l'intérieur de C (et aucune sur C) que $z^4 + \frac{1}{14}$, c'est-à-dire 4, puisque $14^{-1/4} < \frac{1}{\sqrt{2}}$. De plus $P'(z) = 5z^4 + 4z^3 = z^3(5z+4)$ n'a pas pas racine commune avec P à l'intérieur de C ($-\frac{4}{5}$ est à l'extérieur et 0 n'est pas racine de P). Les racines sont donc distinctes.
On a $(1+\frac{1}{14})^5 = (1+\frac{1}{14})(1+\frac{1}{14})^4 = (1+\frac{1}{14})^4 + \frac{1}{14}(1+\frac{1}{14})^4 > (1+\frac{1}{14})^4 + \frac{1}{14}$. Donc $|z^5| > |z^4 + \frac{1}{14}|$ sur le cercle centré en l'origine et de rayon $1 + \frac{1}{14}$. Par le théorème de Rouché P a autant de racines à l'intérieur de ce cercle que z^5, c'est-à-dire 5. C'est donc que la cinquième racine Z de P vérifie $|Z| < 1 + \frac{1}{14}$.

Rem. : On a $P(-1) = \frac{1}{14} > 0$ et $\lim_{x \to -\infty} P(x) = -\infty$, donc par le théorème des valeurs intermédiaires il existe une racine réelle x_0 de P dans $]-\infty, -1[$. Cette racine est donc Z qui est ainsi réel et < -1. Donc $-1 - \frac{1}{14} < Z < -1$.

(3 pts) **7.** Soit $H = \{z \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ et $\overline{H} = \{z \mid \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$. Soit f une fonction continue sur $\overline{H}$, qui est de plus holomorphe sur H. On suppose $|f| \leq 1000$ sur $\overline{H}$ et $|f| \leq 1$ sur $\mathbf{R}$. Montrer : $|f| \leq 1$ sur $\overline{H}$.

Indication : considérer les fonctions $g(z) = \frac{f(z)}{\epsilon z + i}$ pour $\epsilon > 0$.

<u>Corr.</u> : Soit $\epsilon > 0$ et soit $g(z) = \frac{f(z)}{\epsilon z + i}$. La fonction g est continue sur $\overline{H}$ et holomorphe sur H. Le module $|\epsilon z + i|$ est la distance de ϵz à $-i$ et est donc ≥ 1 pour $z \in \mathbf{R}$ (ou même $z \in \overline{H}$). Donc $|g(z)| \leq 1$ pour $z \in \mathbf{R}$. Lorsque z est dans le demi-plan supérieur et tel que $\epsilon|z| - 1 > 0$, c'est-à-dire si $|z| > \epsilon^{-1}$ alors $|g(z)| \leq \frac{1000}{\epsilon|z|-1}$. Soit z_0 quelconque dans le demi-plan supérieur H, et soit R plus grand que $|z_0|$ et plus grand que ϵ^{-1}. Alors le contour formé par le segment $[-R, +R]$ et le demi-cercle de rayon R dans le demi-plan supérieur contient z_0 à l'intérieur. Par le principe du maximum $|g(z_0)|$ est majoré par le supremum de $|g|$ sur le bord qui est $\leq \max(1, \frac{1000}{\epsilon R - 1})$. En faisant tendre R vers l'infini on obtient donc $|g(z_0)| \leq 1$. Donc pour tout z dans H on a $|f(z)| \leq |\epsilon z + i|$. Il suffit alors de faire tendre ϵ vers zéro pour obtenir $|f(z)| \leq 1$.