

M305 (Variables Complexes)
EXAMEN DU 7 MARS 2007
durée : 3 heures ; ni documents ni calculatrices

Toute question demande en réponse non seulement un résultat mais surtout une démonstration. Le barème n'est donné qu'à titre indicatif.

(3 pts) **1.** Déterminer les rayons de convergence

(a) de $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4^n + 9^n} z^{2n}$,

(b) et de $\sum_{n=1}^{\infty} 10^{n^3} z^{n^2}$.

(4 pts) **2.** Soit $f(z) = \frac{3z^2 - 1}{z(z^2 - 1)}$.

(a) Décomposer la fraction rationnelle f en éléments simples,

(b) puis déterminer ses séries de Laurent :

(a) pour $0 < |z| < 1$,

(b) et pour $|z| > 1$.

(c) Enfin, déterminer $\int_{|z|=2} f(z) dz$.

(4 pts) **3.** Soit $f(z) = \frac{1}{(z^2 + 4z + 5)(z - i)}$.

(a) Déterminer les singularités et les résidus dans \mathbf{C} de f ,

(b) puis trouver en la justifiant la valeur de $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$,

(c) enfin, en déduire les valeurs de

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2 + 4x + 5)(x^2 + 1)} dx \quad \text{et de} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 4x + 5)(x^2 + 1)} dx$$

Ces valeurs doivent être déduites du résultat donné à la question précédente.

(2 pts) 4. Déterminer $A = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x^2 + 6ix - 9} dx$.

(2 pts) 5. Déterminer $B = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^4 + 2x^2 + 1)^2}$.

(2 pts) 6. Soit $f(z) = \frac{1}{5}z^{50} + z^{30} + \frac{1}{5}$.

1. Quel est l'énoncé du théorème de Rouché ?
2. Combien la fonction f a-t-elle de zéros dans le disque unité ? Montrer qu'ils sont tous simples.

(3 pts) 7. Quel est l'énoncé du principe du maximum ? Soit $Q = \{z = x + iy \mid x > 0, y > 0\}$. Soit f une fonction holomorphe sur \overline{Q} . Est-il exact que si $|f(x)| \leq 1$ pour tout $x \geq 0$ et si $|f(iy)| \leq 1$ pour tout $y \geq 0$ alors $|f(z)| \leq 1$ pour $z \in Q$? Si oui, prouver le ; si non, prouver le.