Université Lille 1 — UFR de Mathématiques
Licence de Mathématiques (L3, S5, année 2006–2007)

M305 (Variables Complexes)
EXAMEN DU 16 JANVIER 2007
durée : 3 heures ; ni documents ni calculatrices

Toute question demande en réponse non seulement un résultat mais surtout une démonstration. Le barême n'est donné qu'à titre indicatif.

(3 pts) **1.** Déterminer les rayons de convergence

(a) de $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-n^2} z^{7n}$,

(b) et de $\sum_{n=1}^{\infty}(9^{3n}+4^{5n})z^{2n}$. Pour cela on commencera par se demander qui de 9^3 ou de 4^5 est le plus grand ! (et on les mettra sous la forme de carrés).

(4 pts) **2.** Soit $f(z)=\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z+1}+\dfrac{1}{z+2}$. Déterminer les développements de f en série de Laurent :

(a) pour $0<|z|<1$,

(b) pour $1<|z|<2$,

(c) et pour $|z|>2$.

Soit C le cercle de centre $\dfrac{-3}{2}$ et de rayon 1. Que vaut $\int_C f(z)\,dz$?

(4 pts) **3.** Déterminer les singularités et les résidus dans $\mathbf{C}$ de $f(z)=\dfrac{1}{(z^2-2z+2)(z^2+1)}$. Puis trouver la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2-2x+2)(x^2+1)}$.

(2 pts) **4.** Que vaut $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\pi x}}{x^2+2x+2}\,dx$? (attention, dans l'exercice précédent il y avait x^2-2x+2, ici cela a changé, c'est x^2+2x+2).

TOURNEZ LA PAGE

(3 pts) **5.** Soit $\sum_{k=0}^{\infty} c_k h^k$ la série de Taylor de $\dfrac{1}{(2i+h)^5}$ en zéro. Trouver ce que valent c_0, c_1, c_2, c_3 et c_4. Puis, déterminer la valeur de $A = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^5}$.

(3 pts) **6.** Soit $P(z) = z^5 + z^4 + \dfrac{1}{14}$.

points négatifs si non-réponse ou réponse fausse→

1. établir $\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{\sqrt{2}} < \dfrac{10}{56}$, $\sqrt[4]{\dfrac{1}{14}} < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, et $\dfrac{4}{5} > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
2. Soit C le cercle de centre zéro et de rayon $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Montrer $|z^4 + \dfrac{1}{14}| \geq \dfrac{10}{56} > |z^5|$ pour $z \in C$. En déduire en invoquant le théorème de Rouché (et en examinant P') que P a exactement quatre racines distinctes vérifiant $|z| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (et aucune sur C).
3. Soit Z l'unique racine de P avec $|Z| > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. En invoquant à nouveau le théorème de Rouché d'une manière appropriée établir $|Z| < 1 + \dfrac{1}{14}$. On aura montré $(1+\dfrac{1}{14})^5 > (1+\dfrac{1}{14})^4 + \dfrac{1}{14}$.

(3 pts) **7.** Soit $H = \{z \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ et $\overline{H} = \{z \mid \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$. Soit f une fonction continue sur $\overline{H}$, qui est de plus holomorphe sur H. On suppose $|f| \leq 1000$ sur $\overline{H}$ et $|f| \leq 1$ sur $\mathbf{R}$. Montrer : $|f| \leq 1$ sur $\overline{H}$.

Indication : considérer les fonctions $g(z) = \dfrac{f(z)}{\epsilon z + i}$ pour $\epsilon > 0$.