Licence - S6 - Mathématiques 312

Examen - Session de septembre

Documents et calculatrices ne sont pas autorisés

On pourra à chaque question admettre les résultats des précédentes.

Barême indicatif : 14 + 6. Lisez les énoncés attentivement, n'oubliez aucune question lorsque plusieurs sont posées dans le même alinéa.

Problème I

Comme d'habitude on note $L^1 = L^1(0, 2\pi; \frac{dx}{2\pi})$ et $L^2 = L^2(0, 2\pi; \frac{dx}{2\pi})$ et l'on considère leurs éléments comme étant 2π-périodiques. On note $e_n(x) = e^{inx}$ pour $n \in \mathbb{Z}$ et $(f, g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$ est le produit scalaire de L^2. Pour $f \in L^2$ on peut donc écrire $c_n(f) = (f, e_n)$.

1. Soit $f \in L^2$. Soit $M \geq 2$. En faisant le changement de variable $t = Mx$ montrer $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Mx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$ et $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(Mx)|^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx$.

2. Soit $T_M : L^2 \to L^2$ l'application linéaire définie par $T_M(f)(x) = f(Mx)$. Montrer $\|T_M(f)\|_2 = \|f\|_2$ et en déduire $|(T_M(f) - T_M(g), k)| \leq \|f - g\|_2 \cdot \|k\|_2$ pour toutes $f, g, k \in L^2$.

3. Soit $f \in L^2$ de coefficients de Fourier $c_m = c_m(f)$. Soit $S_N = \sum_{|m|\leq N} c_m\, e_m$. Pour chaque $m \in \mathbb{Z}$ déterminer les coefficients de Fourier de $T_M(S_N)(x) = S_N(Mx)$.

4. Déduire des deux questions précédentes $c_m(T_M(f)) = \begin{cases} 0 & (m \not\equiv 0 \mod M) \\ c_{m/M} & (m \equiv 0 \mod M) \end{cases}$

Confirmer $\|T_M(f)\|_2 = \|f\|_2$.

5. Montrer que pour toute fonction $f \in L^2$ on a $\sum_{|m|\geq 1}\left|\frac{c_m(f)}{m}\right| \leq \frac{\pi}{\sqrt{3}}\|f\|_2$ et que pour tout $M \geq 2$ on a $\sum_{|m|\geq 1}\left|\frac{c_m(T_M(f))}{m}\right| = \frac{1}{M}\sum_{|m|\geq 1}\left|\frac{c_m(f)}{m}\right|$.

6. Soit $0 \leq a < b \leq 2\pi$ et soit g la fonction 2π-périodique valant 1 sur $]a, b[$ et 0 sur $[0, 2\pi]\setminus]a, b[$. Déterminer les coefficients de Fourier $c_m(g)$. Pour quels $x \in [0, 2\pi]$ la série de Fourier de g est-elle convergente ? et vers quelle valeur ? Justifier en distinguant les possibilités selon les valeurs de a, b, x.

7. Soit $f \in L^2$ et $0 \leq a < b \leq 2\pi$. En interprétant $\frac{1}{2\pi}\int_a^b f(x)\,dx$ comme un produit

-LA SUITE AU VERSO-

scalaire, prouver : $\left|\frac{1}{2\pi}\int_a^b f(x)\,dx - c_0(f)\frac{b-a}{2\pi}\right| \leq \frac{1}{\pi}\sum_{|m|\geq 1}\left|\frac{c_m(f)}{m}\right|$.

8. Déduire des questions précédentes que pour toute fonction $f \in L^2$ on a :

$$\lim_{M \to +\infty} \frac{1}{2\pi}\int_a^b f(Mx)\,dx = c_0(f)\frac{b-a}{2\pi}$$

9. Soit U une fonction 2π-périodique en escalier. Déduire de la question précédente $\lim_{M\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Mx)U(x)\,dx = c_0(f)c_0(U)$.

10. Montrer $(T_M(f), g-k) \leq \|f\|_2 \cdot \|g-k\|_2$ pour f, g, $k \in L^2$. Déduire des questions précédentes l'existence et la valeur de $\lim_{M\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Mx)g(x)\,dx$ pour toutes fonctions f et g dans L^2.

11. On suppose f bornée. Montrer que $\lim_{M\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Mx)g(x)\,dx$ existe pour toute fonction g dans L^1 et donner sa valeur. Par exemple que vaut $\lim_{M\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\cos(Mx)|\,g(x)\,dx$?

Problème II

Dans ce problème f est 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^\infty$ et on note $c_n = c_n(f)$.

12. Soit $p \geq 1$. Montrer $c_n(f^{(p)}) = (in)^p c_n$. En déduire qu'il existe une constante C_p telle que $|c_n| \leq \frac{C_p}{|n|^p}$ pour $|n| \geq 1$.

13. Justifier l'identité pour tout x : $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ (une justification n'utilisant pas la question précédente est possible). Montrer, en utilisant la question précédente, que la série est normalement convergente.

14. Soit $M \geq 2$. Soit $\omega = e^{i\frac{2\pi}{M}}$. Soit $q \in \{0, 1, \ldots, M-1\}$, et $x = 2\pi\frac{q}{M}$. Montrer $e^{inx} = e^{ijx}$ si $n \equiv j \mod M$. Justifier $f(x) = \sum_{j=0}^{M-1} A_j\, \omega^{jq}$, avec par définition $A_j = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{j+kM}$ pour $j \in \{0, 1, \ldots, M-1\}$.

15. Prouver $\sum_{q=0}^{M-1} \omega^{jq} = 0$ si $j \in \{1, \ldots, M-1\}$. Ind. : multiplier par $1-\omega^j$.

16. En déduire $\sum_{q=0}^{M-1} \frac{2\pi}{M} f(q\frac{2\pi}{M}) = 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{kM}$. Prouver alors pour tout $p \geq 1$:

$$\forall M \geq 2 \qquad \left|\sum_{q=0}^{M-1} \frac{2\pi}{M} f(q\frac{2\pi}{M}) - \int_0^{2\pi} f(t)\,dt\right| \leq \frac{D}{M^p}$$

avec une certaine constante D dépendant de p (et de f).