
| Université Lille 1 - UFR de Mathématiques |
| Licence Semestre 6 - 2005/2006 - MATH 312 |

Licence de Mathématiques - S6 - 312 Analyse Hilbertienne
Examen du 15 juin 2006 (11542) - M1 Galois - 14h00-17h00
CORRIGÉ-CORRIGÉ-CORRIGÉ-CORRIGÉ

On pourra à chaque question admettre les résultats des précédentes.

Barême indicatif : $13 + 7$. Lisez les énoncés attentivement, n'oubliez aucune question lorsque plusieurs sont posées dans le même alinéa.

Barême utilisé : $15 + 8 = 23$.

P r o b l è m e I

Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $y \in]0, \pi[$. Soit la fonction 2π-périodique paire :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda & x \in [0, y[\\ 0 & x = y \\ \mu & x \in]y, \pi] \end{cases}$$

1. Représenter un graphe de f sur $[-\pi, +3\pi]$. Déterminer les coefficients de Fourier $a_n(f)$, $n \geq 0$ et $b_n(f)$, $n \geq 1$. Suivant la valeur de $x \in [0, \pi]$ la série de Fourier $S(x)$ de f est-elle convergente ? et vers quelle valeur ? Justifier.

3pts Je m'économise un peu d'informatique et ne représente pas le graphe de cette fonction en escalier ; d'ailleurs la grande majorité des étudiants l'ont fait correctement. La fonction est paire donc les $b_n(f)$ sont nuls. On a $a_0(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)dt = \frac{2}{\pi}(\lambda y + \mu(\pi - y))$. On a pour $n \geq 1$, $a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos(nt)dt = \frac{2}{\pi}\left(\left[\lambda\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^y + \left[\mu\frac{\sin(nt)}{n}\right]_y^\pi\right) = \frac{2}{\pi}(\lambda - \mu)\frac{\sin(ny)}{n}$. La fonction est de classe C^1 par morceaux donc, par le théorème de Dirichlet (-Jordan) sa série de Fourier converge en tout x vers $\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$. Si $x \in [0, \pi]$ est distinct de y alors x est un point de continuité de f (on a pu le constater aussi pour $x = 0$ et pour $x = \pi$ au moment de dessiner le graphe) donc la série de Fourier converge vers $f(x)$. Au point $x = y$ la série de Fourier converge vers $\frac{f(y^-)+f(y^+)}{2} = \frac{\lambda+\mu}{2}$.

On prend dorénavant $\lambda = \frac{1}{y}$ et $\mu = \frac{-1}{\pi - y}$. On pourra admettre qu'avec ce choix :

$$S(x) = \frac{2}{y(\pi - y)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(ny)\cos(nx)}{n}$$

2. On considère la fonction impaire $g(t) = \int_0^t f(x)\,dx$. Que valent $g(y)$ et $g(\pi)$? Montrer que g est 2π-périodique, dessiner un graphe de g sur $[-\pi, +\pi]$ et vérifier $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi g^2(t)\,dt = \frac{1}{3}$.

2pts On a $g(y) = \int_0^y \lambda\,dx = \lambda y = 1$. On a $g(\pi) = 1 + \int_y^\pi \mu\,dx = 1 + \mu(\pi - y) = 1 + (-1) = 0$. On a $g(t + 2\pi) - g(t) = \int_t^{t+2\pi} f(x)dx$ qui, par 2π-périodicité de f est indépendant de t. Pour $t = 0$ par exemple on trouve $\pi a_0(f) = 0$. Ou encore pour $t = -\pi$ et en utilisant la parité de f on trouve $2\int_0^\pi f(x)dx = 2g(\pi) = 0$. Donc g est 2π-périodique. Ici aussi je laisse tomber le graphe, qui est celui d'une fonction continue, impaire, affine par morceaux (donc composé de segments rectilignes). Une majorité (moins large que pour f) des étudiants l'ont fait correctement. On a $g(t) = \frac{t}{y}$ pour $0 \leq t \leq y$ et $g(y) = \frac{\pi-t}{\pi-y}$ pour $y \leq t \leq \pi$. Sur cette base on calcule $\int_0^\pi g^2(t)\,dt = \left[\frac{1}{3}\frac{t^3}{y^2}\right]_0^y + \left[-\frac{1}{3}\frac{(\pi-t)^3}{(\pi-y)^2}\right]_y^\pi = \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}(\pi - y) = \frac{\pi}{3}$. Donc $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi g^2(t)\,dt = \frac{1}{3}$.

3. On rappelle $\exists C < \infty\ \forall N\ \forall u\ \left|\sum_{1\leq k\leq N}\frac{\sin(ku)}{k}\right| \leq C$. En exprimant les sommes partielles de $S(x)$ avec $y + x$ et $y - x$, et en utilisant un théorème de la théorie de l'intégration justifier : $\forall t \in [0, \pi]$ $\quad g(t) = \frac{2}{y(\pi-y)}\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin(ny)\sin(nt)}{n^2}$.

2pts Soit $S_N(x) = \frac{2}{y(\pi-y)}\sum_{n=1}^N \frac{\sin(ny)\cos(nx)}{n}$. On a $f(x) = \lim_{N\to\infty} S_N(x)$ (pour $0 \leq x \leq \pi$ et sauf peut-être en $x = y$) donc, pour $0 \leq t \leq \pi$, $g(t) = \int_0^t \lim S_N(x)\,dx$. Pour justifier $g(t) = \lim_{N\to\infty}\int_0^t S_N(x)\,dx$ il suffit, par le théorème de la convergence dominée, de trouver une fonction $K(x)$ qui vérifie $\forall N\ |S_N(x)| \leq K(x)$ sur $[0, t]$ et telle que $\int_0^t K(x)\,dx < \infty$. Or $\sin(ny)\cos(nx) = \frac{1}{2}(\sin(n(y + x)) + \sin(n(y - x)))$ donc $|S_N(x)| \leq \frac{1}{y(\pi-y)}\left(\left|\sum_{1\leq k\leq N}\frac{\sin(k(y+x))}{k}\right| + \left|\sum_{1\leq k\leq N}\frac{\sin(k(y-x))}{k}\right|\right) \leq \frac{2C}{y(\pi-y)}$. Il suffit donc de prendre pour K la fonction constante $\frac{2C}{y(\pi-y)}$. On a donc $g(t) = \lim_{N\to\infty}\int_0^t S_N(x)\,dx$ ce qui donne le résultat demandé en faisant les intégrations terme à terme.

4. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin^2(ny)}{n^2}$ et prouver $\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin^2(ny)}{n^4} = \frac{y^2(\pi-y)^2}{6}$.

2pts On évalue en $t = y$ ce qui donne $g(y) = 1 = \frac{2}{y(\pi-y)}\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin^2(ny)}{n^2}$ et donc $\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin^2(ny)}{n^2} = \frac{y(\pi-y)}{2}$. Par ailleurs on peut appliquer l'égalité de Bessel-Parseval à la fonction impaire g, ce qui donne $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi |g(t)|^2\,dt = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2}|b_n(g)|^2$. Par unicité des coefficients de Fourier on a par la question précédente $b_n(g) = \frac{2}{y(\pi-y)}\frac{\sin(ny)}{n^2}$. Ainsi $\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\frac{4}{y^2(\pi-y)^2}\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin^2(ny)}{n^4}$ ce qui donne après simplification la formule $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(ny)}{n^4} = \frac{y^2(\pi-y)^2}{6}$.

5. On admettra $\int_0^{\pi} y^2(\pi-y)^2\,dy = \frac{\pi^5}{30}$ et $\int_0^{\pi} y^4(\pi-y)^4\,dy = \frac{\pi^9}{630}$. Déduire de la question précédente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$, puis déterminer la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8}$.

3pts Par, soit le théorème de la convergence monotone, soit plus simplement la convergence normale de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(ny)}{n^4}$ (puisque $\forall y\ 0 \leq \frac{\sin^2(ny)}{n^4} \leq \frac{1}{n^4}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} < \infty$), on peut intégrer terme à terme : $\int_0^{\pi} \frac{y^2(\pi-y)^2}{6}\,dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \int_0^{\pi} \sin^2(ny)\,dy = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$. Donc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{3\pi} \int_0^{\pi} y^2(\pi-y)^2\,dy = \frac{1}{3\pi}\frac{\pi^5}{30} = \frac{\pi^4}{90}$. Par ailleurs on utilisant l'identité $\sin^2(a) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2a)$ on peut écrire $6\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(ny)}{n^4} = y^2(\pi-y)^2$ sous la forme $3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} - 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2ny)}{n^4} = \frac{\pi^4}{30} - 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2ny)}{n^4} = y^2(\pi-y)^2$. On a à gauche une série de Fourier en cosinus à laquelle on peut appliquer l'identité de Bessel-Parseval. Ceci donne $\frac{\pi^8}{900} + \frac{1}{2} 9 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} y^4(\pi-y)^4\,dy = \frac{\pi^8}{630}$. Donc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8} = \pi^8 \frac{2}{9}(\frac{1}{630} - \frac{1}{900}) = \pi^8 \frac{2}{810}(\frac{1}{7} - \frac{1}{10}) = \pi^8 \frac{2}{810}\frac{3}{70} = \pi^8 \frac{1}{270\times 35} = \frac{\pi^8}{9450}$.

6. On définit $T(x) = \frac{y(\pi-y)}{2} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(ny)\cos(nx)}{n}$. Que valent $M^+ = \sup T(x)$ et $M^- = \inf T(x)$? Soit $\sigma_N(x) = (F_N * T)(x) = \sum_{n=1}^{N} (1 - \frac{n}{N}) \frac{\sin(ny)\cos(nx)}{n}$. Prouver les inégalités :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall N \geq 1 \quad M^- \leq \sigma_N(x) \leq M^+$$

En déduire :

$$\forall y \in]0,\pi[\ \forall N \geq 1\ \forall x \in \mathbb{R} \quad -\frac{y}{2} - 1 \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(ny)\cos(nx)}{n} \leq \frac{\pi - y}{2} + 1$$

3pts La fonction $S(x)$ prend les trois valeurs $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{2}(\frac{1}{y} - \frac{1}{\pi-y})$ et $-\frac{1}{\pi-y}$. Sa valeur maximale est donc $\frac{1}{y}$ et par conséquent $M_+ = \frac{\pi-y}{2}$. Et $M_- = -\frac{y}{2}$. On sait que le noyau de Fejér ne prend que des valeurs positives ou nulles, donc de la formule $\sigma_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_N(x-u)T(u)\,du$ on peut déduire $(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_N(x-u)\,du) M_- \leq \sigma_N(x) \leq (\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_N(x-u)\,du) M_+$ ce qui donne, pour tout x réel : $M^- \leq \sigma_N(x) \leq M^+$. Par ailleurs on constate que $(F_N * T)(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(ny)\cos(nx)}{n} - \frac{1}{N}(\sum_{n=1}^{N} \sin(ny)\cos(nx))$. Ce dernier terme est en valeur absolue majoré par 1 puisque qu'il s'agit d'une moyenne de valeurs dans $[-1,+1]$. Donc $\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(ny)\cos(nx)}{n}$ est majoré par $M_+ + 1$ et minoré par $M_- - 1$, ce qu'il fallait démontrer.

Problème II

On rappelle que la convolution $(f*g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)\,dt$ est une opération commutative et associative pour les fonctions 2π-périodiques intégrables. De plus on a la formule importante : $\forall n \in \mathbb{Z}\ c_n(f*g) = c_n(f)c_n(g)$. Enfin on note $L^1 = L^1(0, 2\pi; \frac{dx}{2\pi})$ et $L^2 = L^2(0, 2\pi; \frac{dx}{2\pi})$ et l'on considère leurs éléments comme étant 2π-périodiques.

7. On suppose que f et k sont deux fonctions intégrables telles que $k = f*k$. Que peut-on dire de $c_n(f)$? En déduire que k est un polynôme trigonométrique.

2pts On a $c_n(k) = c_n(k)c_n(f)$ donc, si $c_n(k)$ est non nul alors $c_n(f) = 1$. Par le Lemme de Riemann-Lebesgue on a pour toute fonction intégrable f : $\lim_{|n|\to\infty} c_n(f) = 0$. Donc il existe N tel que $|n| \geq N$ implique $|c_n(f)| \leq \frac{1}{2}$. Alors pour $|n| \geq N$ on a nécessairement $c_n(f) \neq 1$ ce qui n'est possible que si $c_n(k) = 0$. Donc k est un polynôme trigonométrique.

La suite du problème est indépendante de cette première question.

8. On suppose f bornée, $g_1, g_2 \in L^1$, montrer $\sup|f*g_1 - f*g_2| \leq \sup|f|\cdot\|g_1 - g_2\|_1$.

1pt On n'a qu'à partir de $(f*g_1)(x) - (f*g_2)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)(g_1(t) - g_2(t))\,dt$ qui est majoré en module par $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x-t)||g_1(t) - g_2(t)|\,dt \leq \sup|f|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g_1(t) - g_2(t)|\,dt = \sup|f|\|g_1 - g_2\|_1$.

9. On suppose $f \in L^1$ et g continue, montrer que $f*g$ $(= g*f)$ est continue.

2,5pts On écrit $(f*g)(y) - (f*g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)(g(y-t) - g(x-t))\,dt$. La fonction continue g est uniformément continue sur le compact $[-2\pi, +2\pi]$. Donc, pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver $\eta > 0$ tel que $|g(t_1) - g(t_2)| \leq \epsilon$ pour tous $t_1 \in [-2\pi, +2\pi]$, $t_2 \in [-2\pi, +2\pi]$ tels que $0 \leq |t_1 - t_2| < \eta$. Supposons que $x, y \in [0, 2\pi]$ soient tels que $|x - y| \leq \eta$. Alors en remarquant que pour tout $t \in [0, 2\pi]$ on a $t_1 = y - t \in [-2\pi, +2\pi]$, $t_2 = x - t \in [-2\pi, +2\pi]$, et $|t_1 - t_2| = |y - x| < \eta$ on obtient $|(f*g)(y) - (f*g)(x)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|\epsilon\,dt = \epsilon\|f\|_1$. La fonction $f*g$ est donc (uniformément) continue sur l'intervalle $[0, 2\pi]$. Comme elle est 2π-périodique elle est continue sur $\mathbb{R}$. Autre preuve : on invoque le théorème de continuité des intégrales à paramètre, en écrivant $(f*g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G(x,t)\,dt$. La fonction $G(x,t) = f(t)g(x-t)$ est pour chaque t fixé une fonction continue de x et de plus on a $\forall x\ \forall t\ |G(x,t)| \leq \sup|g|\ |f(t)| = K(t)$ qui est une fonction intégrable sur $[0, 2\pi]$ et indépendante de x. Donc $x \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G(x,t)\,dt$ est une fonction continue de x.

10. Que peut-on dire d'après le Cours des sommes de Fejér $F_n * g$, lorsque $g \in L^1$? On suppose que f est bornée. Montrer que les fonctions $k_n = f * F_n * g$, $n \geq 1$, sont continues et convergent <u>uniformément</u> vers $f*g$. En déduire que $f*g$ est une fonction continue.

2,5pts D'après le cours les sommes de Fejér $F_n * g$ convergent au sens L^1 vers g : $\lim_{n\to\infty} \|F_n * g - g\|_1 = 0$. Les fonctions $F_n * g$ sont des polynômes trigonométriques donc des fonctions continues, et par la question précédente il en résulte que $f * F_n * g$ est une fonction continue. Plus simplement, on a $k_n = f * F_n * g = F_n * (f * g)$ ce qui montre que k_n est un polynôme trigonométrique (Nième somme de Fejér de la fonction intégrable $f * g$). On peut écrire $\sup_x |(f * F_n * g)(x) - (f * g)(x)| \leq \sup |f| \cdot \|F_n * g - g\|_1$, donc

$$\lim_{n\to\infty} \sup_x |(f * F_n * g)(x) - (f * g)(x)| = 0$$

ce qui n'est pas autre chose que de dire que les fonctions $f * F_n * g$ convergent uniformément (sur $\mathbb{R}$) pour $n \to \infty$ vers la fonction $f * g$. Comme limite uniforme de fonctions continues, la fonction $f * g$ est ainsi une fonction continue.