Université Lille 1 - UFR de Mathématiques
Licence Semestre 6 - 2005/2006 - MATH 312

Licence de Mathématiques - S6 - 312 Analyse Hilbertienne
Examen du 15 juin 2006 (11542) - M1 Galois - 14h00-17h00
Documents et calculatrices ne sont pas autorisés

On pourra à chaque question admettre les résultats des précédentes.

Barême indicatif : 13 + 7. Lisez les énoncés attentivement, n'oubliez aucune question lorsque plusieurs sont posées dans le même alinéa.

Problème I

Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $y \in]0, \pi[$. Soit la fonction 2π-périodique paire :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda & x \in [0, y[\\ 0 & x = y \\ \mu & x \in]y, \pi] \end{cases}$$

1. Représenter un graphe de f sur $[-\pi, +3\pi]$. Déterminer les coefficients de Fourier $a_n(f)$, $n \geq 0$ et $b_n(f)$, $n \geq 1$. Suivant la valeur de $x \in [0, \pi]$ la série de Fourier $S(x)$ de f est-elle convergente ? et vers quelle valeur ? Justifier.

On prend dorénavant $\lambda = \frac{1}{y}$ et $\mu = \frac{-1}{\pi - y}$. On pourra admettre qu'avec ce choix :

$$S(x) = \frac{2}{y(\pi - y)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(ny)\cos(nx)}{n}$$

2. On considère la fonction impaire $g(t) = \int_0^t f(x)\,dx$. Que valent $g(y)$ et $g(\pi)$? Montrer que g est 2π-périodique, dessiner un graphe de g sur $[-\pi, +\pi]$ et vérifier $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi g^2(t)\,dt = \frac{1}{3}$.

3. On rappelle $\exists C < \infty\ \forall N\ \forall u\ \left|\sum_{1 \leq k \leq N} \frac{\sin(ku)}{k}\right| \leq C$. En exprimant les sommes partielles de $S(x)$ avec $y + x$ et $y - x$, et en utilisant un théorème de la théorie de l'intégration justifier : $\forall t \in [0, \pi] \quad g(t) = \frac{2}{y(\pi - y)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(ny)\sin(nt)}{n^2}$.

4. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(ny)}{n^2}$ et prouver $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(ny)}{n^4} = \frac{y^2(\pi - y)^2}{6}$.

5. On admettra $\int_0^\pi y^2(\pi - y)^2\,dy = \frac{\pi^5}{30}$ et $\int_0^\pi y^4(\pi - y)^4\,dy = \frac{\pi^9}{630}$. Déduire de la ques-

-LA SUITE AU VERSO-

tion précédente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$, puis déterminer la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8}$.

6. On définit $T(x) = \frac{y(\pi-y)}{2} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(ny)\cos(nx)}{n}$. Que valent $M^+ = \sup T(x)$ et $M^- = \inf T(x)$? Soit $\sigma_N(x) = (F_N * T)(x) = \sum_{n=1}^{N} (1 - \frac{n}{N}) \frac{\sin(ny)\cos(nx)}{n}$. Prouver les inégalités :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall N \geq 1 \quad M^- \leq \sigma_N(x) \leq M^+$$

En déduire :

$$\forall y \in]0, \pi[\ \forall N \geq 1\ \forall x \in \mathbb{R} \quad -\frac{y}{2} - 1 \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(ny)\cos(nx)}{n} \leq \frac{\pi - y}{2} + 1$$

Problème II

On rappelle que la convolution $(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t) g(t)\, dt$ est une opération commutative et associative pour les fonctions 2π-périodiques intégrables. De plus on a la formule importante : $\forall n \in \mathbb{Z}\ c_n(f * g) = c_n(f) c_n(g)$. Enfin on note $L^1 = L^1(0, 2\pi; \frac{dx}{2\pi})$ et $L^2 = L^2(0, 2\pi; \frac{dx}{2\pi})$ et l'on considère leurs éléments comme étant 2π-périodiques.

7. On suppose que f et k sont deux fonctions intégrables telles que $k = f * k$. Que peut-on dire de $c_n(f)$? En déduire que k est un polynôme trigonométrique.

La suite du problème est indépendante de cette première question.

8. On suppose f bornée, $g_1, g_2 \in L^1$, montrer $\sup |f * g_1 - f * g_2| \leq \sup |f| \cdot \|g_1 - g_2\|_1$.

9. On suppose $f \in L^1$ et g continue, montrer que $f * g$ $(= g * f)$ est continue.

10. Que peut-on dire d'après le Cours des sommes de Fejér $F_n * g$, lorsque $g \in L^1$? On suppose que f est bornée. Montrer que les fonctions $k_n = f * F_n * g$, $n \geq 1$, sont continues et convergent <u>uniformément</u> vers $f * g$. En déduire que $f * g$ est une fonction continue.