Licence - S6 - Mathématiques 312
Examen du 18 mai 2006 - Salle A4 - 17h30-19h30
CORRIGÉ-CORRIGÉ-CORRIGÉ-CORRIGÉ

On pourra à chaque question admettre les résultats des précédentes. Barême indicatif : $3+11+6$. On rappelle l'identité $2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b)+\cos(a-b)$.

Problème I

1. Soit $g(x)$ une fonction continue 2π-périodique paire. En invoquant (dans sa version uniforme) un théorème d'un mathématicien hongrois, justifier pour tout $\epsilon > 0$ l'existence de $n \in \mathbb{N}$, et de $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $0 \leq j \leq n$, tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \left| g(x) - \sum_{0\leq j\leq n} \alpha_j \cos(jx) \right| \leq \epsilon$$

1pt Comme g est paire, sa série de Fourier et donc aussi les sommes de Fejér $\Sigma_n(g)$, obtenues à partir des sommes partielles $S_n(g)$ de la série de Fourier de g par les formules $\Sigma_n(g) = \frac{1}{n}\sum_{0\leq k<n} S_k(g)$, ne comportent que des termes en $\cos(kx)$. Comme g est continue, d'après le théorème de Fejér, les polynômes trigonométriques $\Sigma_n(g)$ convergent uniformément pour $n \to \infty$ vers g. Donc, pour tout $\epsilon > 0$ donné, si on choisit n suffisamment grand et si on écrit $\Sigma_n(g) = \sum_{0\leq j\leq n} \alpha_j \cos(jx)$ on a l'inégalité demandée.

2. On pose $T_0(t) = 1$, $T_1(t) = t$ puis par récurrence $T_n(t) = 2t\,T_{n-1}(t) - T_{n-2}(t)$ pour $n \geq 2$. Montrer que T_n est un polynôme de degré exactement n et qu'il vérifie : $\forall x \in \mathbb{R} \quad T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$.

1pt On prouve les deux choses simultanément. C'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$. Soit $n \geq 1$. Si c'est vrai pour tous les $k \leq n$, alors de $T_{n+1}(t) = 2t\,T_n(t) - T_{n-1}(t)$, on déduit $T_{n+1}(\cos x) = 2\cos(x)\cos(nx) - \cos((n-1)x) = \cos((n+1)x) + \cos((n-1)x) - \cos((n-1)x) = \cos((n+1)x)$. Et par ailleurs le polynôme tT_n étant de degré $n+1$ et T_{n-1} de degré strictement inférieur la combinaison T_{n+1} est un polynôme, d'une part, et d'autre part de degré exactement $n+1$. Donc par récurrence, les assertions sont vraies pour tout n.

3. Soit $f : [-1,+1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Déduire des deux questions précédentes le théorème de Weierstrass : pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$, et $\beta_j \in \mathbb{C}$, $0 \leq j \leq n$, tels que $\forall t \in [-1,+1] \quad \left| f(t) - \sum_{0\leq j\leq n} \beta_j t^j \right| \leq \epsilon$.

1pt On considère la fonction composée $g(x) = f(\cos(x))$. Elle est paire, continue, 2π-périodique. Par la première question il existe $n \in \mathbb{N}$, et $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $0 \le j \le n$, tels que $\forall x \in \mathbb{R}$ $\left|f(\cos(x)) - \sum_{0\le j\le n} \alpha_j \cos(jx)\right| \le \epsilon$. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \left|f(\cos(x)) - \sum_{0\le j\le n} \alpha_j T_j(\cos(x))\right| \le \epsilon$$

Or l'application $\cos : \mathbb{R} \dashrightarrow [-1,+1]$ est surjective, donc :

$$\forall t \in [-1,+1] \quad \left|f(t) - \sum_{0\le j\le n} \alpha_j T_j(t)\right| \le \epsilon$$

On sait que chaque T_j est un polynôme, donc la combinaison linéaire $\sum_{0\le j\le n} \alpha_j T_j$ est un polynôme, de degré au plus n, que l'on peut écrire sous la forme $\sum_{0\le j\le n} \beta_j t^j$. D'où le résultat.

Problème II

4. Montrer que la série de Fourier de la fonction 2π-périodique paire $g(x) = |\cos(x)|$ est :

$$S(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\cos(2kx)}{4k^2-1}$$

2pt Comme g est paire, on doit évaluer $a_n(g) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|\cos(x)|\cos(nx)\,dx$. Le changement de variable $x \mapsto \pi - x$ montre $a_n(g) = (-1)^n a_n(g)$, donc $a_n(g) = 0$ pour n impair. On supposera donc $n = 2k$. L'invariance par $x \mapsto \pi - x$ justifie la formule simplifiée : $a_n(g) = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos(x)|\cos(2kx)\,dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)\cos(2kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos((2k+1)x) + \cos((2k-1)x)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1} + \frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}(-1)^k\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-1}\right) = \frac{4}{\pi}(-1)^{k-1}\frac{1}{4k^2-1}$. En particulier pour $k = 0$ on a $a_0 = +\frac{4}{\pi}$. La série de Fourier est $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx)$ ce qui donne la formule demandée.

5. Déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4k^2-1)^2}$.

1pt On applique l'égalité de Bessel-Parseval, qui pour une fonction paire est $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g(x)|^2\,dx = |\frac{a_0}{2}|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2$. On a répété de nombreuses fois que la moyenne sur une période de $\cos^2(x)$ plus généralement de $\cos^2(nx)$ pour $n \ne 0$ est $\frac{1}{2}$. Donc $\frac{1}{2} = \frac{4}{\pi^2} + \frac{1}{2}\,\frac{16}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4k^2-1)^2}$ et par conséquent $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4k^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$.

6. La série de Fourier S(x) est-elle normalement convergente ? Justifier l'identité $\forall x \quad |\cos x| = S(x)$.

1pt Comme $|\cos(2kx)| \leq 1$ pour tout x et tout k et comme $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{4k^2-1} < \infty$ car $\frac{1}{4k^2-1} \sim \frac{1}{4k^2}$, et que $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{4k^2} < \infty$, la série définissant S(x) est normalement convergente. Donc S(x) est une fonction continue, dont on peut calculer les coefficients de Fourier en permutant somme et intégrale, ce qui donnerait (par les relations d'orthogonalité) les mêmes coefficients que la fonction g. On sait que deux fonctions continues avec les mêmes coefficients de Fourier sont identiques (les sommes de Fejér sont identiques et elles convergent vers les fonctions respectives). Donc S(x) = g(x) pour tout x. On peut aussi remarquer que g est C^1 par morceaux, donc par le théorème de Dirichlet (Jordan) sa série de Fourier S(x) est partout convergente (on le savait déjà) et de somme $\frac{1}{2}(g(x^+) + g(x^-)) = g(x)$ car g est continue.

7. Justifier $\frac{1}{4k^2-1} \leq \frac{4}{15}\frac{1}{k^2}$ pour $k \geq 2$ et $\sum_{k\geq N+1}\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{N}$ pour $N \geq 1$.

1pt Il s'agit de vérifier si $15k^2 \leq 4(4k^2 - 1) = 16k^2 - 4$, c'est-à-dire si $4 \leq k^2$, et cela est clairement le cas pour $k \geq 2$. Par ailleurs $\sum_{k\geq N+1}\frac{1}{k^2} \leq \int_N^\infty \frac{1}{t^2}\,dt = \frac{1}{N}$, puisque $\frac{1}{k^2}$ minore $\int_{k-1}^k \frac{1}{t^2}\,dt$.

8. En déduire que pour chaque $N \geq 1$ il existe un polynôme trigonométrique P(x) pair, de degré au plus 2N, et tel que $\forall x \in \mathbb{R}\quad \Big||\cos(x)| - P(x)\Big| \leq \frac{0,4}{N}$.

1pt On prend évidemment le polynôme trigonométrique $P(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^N (-1)^{k-1}\frac{\cos(2kx)}{4k^2-1}$. L'erreur commise $|S(x) - P(x)|$ est majorée par $\frac{4}{\pi}\sum_{k=N+1}^\infty \frac{1}{4k^2-1}$, ce qui compte tenu de la question précédente est inférieur à $\frac{4}{\pi}\frac{4}{15}\frac{1}{N} = \frac{16}{15\pi}\frac{1}{N}$. Pour obtenir l'inégalité de l'énoncé nous vérifions $\frac{16}{15\pi} \leq 0.4$, soit $16 \leq 6\pi$ ce qui est clairement vrai puisque $\pi > 3$.

9. Montrer, pour chaque $N \geq 1$, que pour tout polynôme trigonométrique P(x) de degré au plus $2N + 1$ on a $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big||\cos(x)| - P(x)\Big|^2 dx \geq \frac{1}{\pi^2}\,\frac{1}{2}\,\sum_{N+1}^\infty \frac{1}{k^4} \geq \frac{1}{6\pi^2}\frac{1}{(N+1)^3}$.

2pt Les sommes partielles de la série de Fourier d'une fonction de carré intégrable ont la propriété de meilleure approximation au sens L^2. Donc la valeur minimale possible pour $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big||\cos(x)| - P(x)\Big|^2 dx$ lorsque P est degré au plus $2N + 1$ est obtenu en prenant pour P la somme partielle S_{2N+1} de la série de Fourier de g. On peut de plus alors obtenir cette valeur via l'égalité de Bessel-Parseval, et cela donne ;

$$\frac{1}{2}\,\frac{16}{\pi^2}\sum_{N+1}^{\infty}\frac{1}{(4k^2-1)^2}$$

On minore par $\frac{1}{2}\,\frac{16}{\pi^2}\sum_{N+1}^\infty \frac{1}{(4k^2)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\pi^2}\sum_{N+1}^\infty \frac{1}{k^4} \geq \frac{1}{2}\,\frac{1}{\pi^2}\int_{N+1}^\infty \frac{1}{t^4}\,dt =$

$\frac{1}{6\pi^2}\frac{1}{(N+1)^3}$.

10. En déduire, pour chaque $N \geq 1$, que pour tout polynôme trigonométrique $P(x)$ de degré au plus $2N+1$ il existe $x \in [-\pi, \pi]$ tel que $\Big||\cos(x)| - P(x)\Big| \geq \frac{1}{8}\frac{1}{(N+1)^{\frac{3}{2}}}$.

1pt Si l'on avait pour tout x l'inégalité stricte $\Big||\cos(x)| - P(x)\Big| < \frac{1}{\sqrt{6}\pi}\frac{1}{(N+1)^{\frac{3}{2}}}$, en élévant au carré et en intégrant on obtiendrait une contradiction avec le résultat précédent. Donc il existe un x avec $\Big||\cos(x)| - P(x)\Big| \geq \frac{1}{\sqrt{6}\pi}\frac{1}{(N+1)^{\frac{3}{2}}}$. Vérifions que $\sqrt{6}\pi$ est plus petit que 8. Cela équivaut à $6\pi^2 \leq 64$, et en fait $\pi < 3,2$ donc $\pi^2 < 10,24$ et $6\pi^2 < 61,44 < 64$.

11. On considère la fonction $f(t) = |t|$ sur l'intervalle $[-1, +1]$. D'après le théorème de Weierstrass il existe $n \in \mathbb{N}$ et un polynôme $Q(t) = \sum_{0\leq j\leq n} \beta_j t^j$ de degré n tel que $\forall t \in [-1, +1]$ $\Big||t| - Q(t)\Big| \leq 10^{-6}$. Montrer que le degré n de Q est au moins égal à 4998.

2pt Considérons le polynôme trigonométrique (de degré n) $P(x) = Q(\cos(x))$. Soit N le plus petit entier tel que $2N + 1 \geq n$. Par la question précédente on doit avoir $10^{-6} \geq \frac{1}{8}\frac{1}{(N+1)^{\frac{3}{2}}}$, donc $(N+1)^{\frac{3}{2}} \geq \frac{1}{8}10^6$, $N + 1 \geq \frac{1}{4}10^4 = 2500$. Donc $N \geq 2499$. Donc $2N + 1 \geq 4999$. Donc $n \geq 4998$.

Problème III

Dans ce problème f est une fonction 2π-périodique ayant la propriété de Lipschitz : $\forall x, y\ |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$ pour une certaine constante $C > 0$.

12. Soit $h > 0$. En considérant la fonction $g(x) = f(x + h) - f(x - h)$, prouver

$$\forall h > 0 : \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\sin(nh)|^2 |c_n(f)|^2 \leq C^2 h^2$$

1,5pt On sait que lorsque l'on remplace une fonction $f(x)$ par $f(x + h)$ les coefficients de Fourier deviennent $c_n(f)e^{inh}$. Donc $c_n(g) = c_n(f)e^{inh} - c_n(f)e^{-inh} = 2i\sin(nh)c_n(f)$. L'égalité de Bessel-Parseval donne $\sum_{n\in\mathbb{Z}} 4|\sin(nh)|^2|c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(x)|^2\,dx$. Or $|g(x)| \leq 2Ch$, donc $\sum_{n\in\mathbb{Z}} 4|\sin(nh)|^2|c_n(f)|^2 \leq 4C^2h^2$.

13. Soit k un entier ≥ 1. En prenant $h = \pi\, 2^{-k-1}$ montrer

$$\sum_{2^{k-1}<|n|\leq 2^k} |c_n(f)|^2 \leq C^2\pi^2 2^{-2k-1}$$

En déduire la majoration $\sum_{2^{k-1}<|n|\leq 2^k} |c_n(f)| \leq C\pi(\sqrt{2})^{-k-1}$.

2pt Par la question précédente on a en tout cas pour $h = \pi 2^{-k-1}$ $\sum_{2^{k-1}<|n|\leq 2^k} |\sin(nh)|^2|c_n(f)|^2 \leq C^2\pi^2 2^{-2k-2}$. Pour les n concernés et ce h on a $\frac{\pi}{4} < |n|h \leq \frac{\pi}{2}$ donc $|\sin(nh)| \geq \sin(\frac{\pi}{4})$ et $|\sin(nh)|^2 \geq \frac{1}{2}$. Donc $\sum_{2^{k-1}<|n|\leq 2^k} |c_n(f)|^2 \leq C^2\pi^2 2^{-2k-1}$. On applique ensuite l'inégalité de Caushy-Schwarz pour une somme finie. Il y a $2(2^k - 2^{k-1}) = 2^k$ termes. Donc

$$\sum_{2^{k-1}<|n|\leq 2^k} |c_n(f)| \leq \sqrt{2^k}\sqrt{\sum_{2^{k-1}<|n|\leq 2^k} |c_n(f)|^2} \leq C\pi\sqrt{2}^{(-k-1)}$$

14. Établir alors que la série de Fourier de f est normalement convergente et prouver de plus $\sum_{|n|\geq N} |c_n(f)| = \mathcal{O}(N^{-\frac{1}{2}})$.

1,5pt On a $\sum_{n\in\mathbb{Z},|n|>1} |c_n(f)| = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{2^{k-1}<|n|\leq 2^k} |c_n(f)| \leq C\pi\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{2}^{(-k-1)} < \infty$ car $\sqrt{2} > 1$. La série de Fourier de f est donc normalement convergente. Soit $N > 2$ et soit $K \geq 1$ le plus grand entier avec $2^K < N$. On peut majorer $\sum_{n\in\mathbb{Z},|n|\geq N} |c_n(f)|$ par $\sum_{k=K+1}^{\infty}\sum_{2^{k-1}<|n|\leq 2^k} |c_n(f)| \leq C\pi(\sqrt{2})^{(-K-2)}\frac{1}{1-(\sqrt{2})^{-1}}$. Compte tenu de $N \leq 2^{K+1}$ on peut majorer $(\sqrt{2})^{(-K-2)}$ par $(\sqrt{2})^{-1}\frac{1}{\sqrt{N}}$. La majoration finale est $\sum_{n\in\mathbb{Z},|n|\geq N} |c_n(f)| \leq \frac{C\pi}{\sqrt{2}-1}\frac{1}{\sqrt{N}}$.

15. Justifier à partir de l'inégalité de la question 12 :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2|c_n(f)|^2 \leq C^2$$

Retrouver les résultats de la question précédente.

2pt D'abord on se restreint à une somme finie :

$$\forall h > 0 : \quad \sum_{|n|\leq N} |\sin(nh)|^2|c_n(f)|^2 \leq C^2h^2$$

On divise par h et on fait tendre h vers zéro, cela donne :

$$\sum_{|n|\leq N} n^2|c_n(f)|^2 \leq C^2$$

Comme $N \geq 1$ est arbitraire on en déduit $\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2|c_n(f)|^2 \leq C^2$. Ensuite on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour une somme infinie :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z},n\neq 0} |c_n(f)| = \sum_{n\in\mathbb{Z},n\neq 0} \frac{1}{n}\, n|c_n(f)| \leq \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{Z},n\neq 0}\frac{1}{n^2}}\sqrt{\sum_{n\in\mathbb{Z},n\neq 0} n^2|c_n(f)|^2} \leq \frac{\pi}{\sqrt{3}}C$$

Donc la série de Fourier est normalement convergente. En reprenant la même technique, on a pour tout $N \geq 1$:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z},|n|>N} |c_n(f)| \leq \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{Z},|n|>N} \frac{1}{n^2}} \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{Z},|n|>N} n^2|c_n(f)|^2} \leq \sqrt{\frac{2}{N}}C$$

On a utilisé la majoration $\sum_{n\in\mathbb{Z},|n|>N} \frac{1}{n^2} = 2\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{N}$. Donc $\sum_{|n|\geq N} |c_n(f)| = \mathcal{O}(N^{-\frac{1}{2}})$ et notre preuve montre en fait le résultat plus fort $\sum_{|n|\geq N} |c_n(f)| = o(N^{-\frac{1}{2}})$.