
| Université Lille 1 - UFR de Mathématiques |
| Licence Semestre 6 - 2005/2006 - MATH 312 |

Licence - S6 - Mathématiques 312
Examen du 18 mai 2006 - Salle A4 - 17h30-19h30
Documents et calculatrices ne sont pas autorisés

On pourra à chaque question admettre les résultats des précédentes. Barême indicatif : $3+11+6$. On rappelle l'identité $2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b)+\cos(a-b)$.

Problème I

1. Soit $g(x)$ une fonction continue 2π-périodique paire. En invoquant (dans sa version uniforme) un théorème d'un mathématicien hongrois, justifier pour tout $\epsilon > 0$ l'existence de $n \in \mathbb{N}$, et de $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $0 \le j \le n$, tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \left| g(x) - \sum_{0\le j\le n} \alpha_j \cos(jx) \right| \le \epsilon$$

2. On pose $T_0(t) = 1$, $T_1(t) = t$ puis par récurrence $T_n(t) = 2t\,T_{n-1}(t) - T_{n-2}(t)$ pour $n \ge 2$. Montrer que T_n est un polynôme de degré exactement n et qu'il vérifie : $\forall x \in \mathbb{R} \quad T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$.

3. Soit $f : [-1,+1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Déduire des deux questions précédentes le théorème de Weierstrass : pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$, et $\beta_j \in \mathbb{C}$, $0 \le j \le n$, tels que $\forall t \in [-1,+1] \quad \left| f(t) - \sum_{0\le j\le n} \beta_j t^j \right| \le \epsilon$.

Problème II

4. Montrer que la série de Fourier de la fonction 2π-périodique paire $g(x) = |\cos(x)|$ est :

$$S(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\cos(2kx)}{4k^2-1}$$

5. Déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^2}$.

6. La série de Fourier $S(x)$ est-elle normalement convergente ? Justifier

-LA SUITE AU VERSO-

l'identité $\forall x \quad |\cos x| = S(x)$.

7. Justifier $\frac{1}{4k^2-1} \leq \frac{4}{15}\frac{1}{k^2}$ pour $k \geq 2$ et $\sum_{k\geq N+1} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{N}$ pour $N \geq 1$.

8. En déduire que pour chaque $N \geq 1$ il existe un polynôme trigonométrique $P(x)$ pair, de degré au plus $2N$, et tel que $\forall x \in \mathbb{R} \quad \Big| |\cos(x)| - P(x) \Big| \leq \frac{0,4}{N}$.

9. Montrer, pour chaque $N \geq 1$, que pour tout polynôme trigonométrique $P(x)$ de degré au plus $2N+1$ on a $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Big| |\cos(x)| - P(x) \Big|^2 dx \geq \frac{1}{\pi^2}\frac{1}{2}\sum_{N+1}^{\infty}\frac{1}{k^4} \geq \frac{1}{6\pi^2}\frac{1}{(N+1)^3}$.

10. En déduire, pour chaque $N \geq 1$, que pour tout polynôme trigonométrique $P(x)$ de degré au plus $2N+1$ il existe $x \in [-\pi, \pi]$ tel que $\Big| |\cos(x)| - P(x) \Big| \geq \frac{1}{8}\frac{1}{(N+1)^{\frac{3}{2}}}$.

11. On considère la fonction $f(t) = |t|$ sur l'intervalle $[-1, +1]$. D'après le théorème de Weierstrass il existe $n \in \mathbb{N}$ et un polynôme $Q(t) = \sum_{0\leq j\leq n} \beta_j t^j$ de degré n tel que $\forall t \in [-1, +1] \quad \Big| |t| - Q(t) \Big| \leq 10^{-6}$. Montrer que le degré n de Q est au moins égal à 4998.

Problème III

Dans ce problème f est une fonction 2π-périodique ayant la propriété de Lipschitz : $\forall x, y \ |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$ pour une certaine constante $C > 0$.

12. Soit $h > 0$. En considérant la fonction $g(x) = f(x+h) - f(x-h)$, prouver

$$\forall h > 0 : \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\sin(nh)|^2 |c_n(f)|^2 \leq C^2 h^2$$

13. Soit k un entier ≥ 1. En prenant $h = \pi\, 2^{-k-1}$ montrer

$$\sum_{2^{k-1}<|n|\leq 2^k} |c_n(f)|^2 \leq C^2 \pi^2 2^{-2k-1}$$

En déduire la majoration $\sum_{2^{k-1}<|n|\leq 2^k} |c_n(f)| \leq C\pi(\sqrt{2})^{-k-1}$.

14. Établir alors que la série de Fourier de f est normalement convergente et prouver de plus $\sum_{|n|\geq N} |c_n(f)| = \mathcal{O}(N^{-\frac{1}{2}})$.

15. Justifier à partir de l'inégalité de la question 12 :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 |c_n(f)|^2 \leq C^2$$

Retrouver les résultats de la question précédente.