Université Lille 1 - UFR de Mathématiques

Licence Semestre 6 - 2005/2006 - MATH 312

Familles Sommables

version du 16 mai 2006.

La notion de famille sommable est utile, par exemple pour définir ce qu'est une base orthonormée non nécessairement dénombrable, ou pour être à l'aise avec des sommes avec des multi-indices, ou pour impressionner. Bien qu'on puisse considérer cette notion comme englobée par le formalisme général des espaces mesurés, il y a tout de même quelques petites choses qu'il est utile de connaître (pour le niveau M). Comme j'avais rédigé cela un jour de folie de l'année dernière, je le reprends à peu près tel quel.

On a un ensemble d'indices Λ et une fontion $\Lambda \dashrightarrow \mathbb{C}$, que l'on notera $\lambda \dashrightarrow u_\lambda$ et l'on se demande si l'on peut donner un sens à $\sum_{\lambda\in\Lambda} u_\lambda$. Le point crucial est que la valeur de la somme doit correspondre à la notation : donc il ne faut pas que le résultat dépende d'une énumération de Λ par $\mathbb{N}$ (si Λ est infini dénombrable).

Le support de $\lambda \dashrightarrow u_\lambda$ est l'ensemble $\Lambda_0 = \{\lambda \mid u_\lambda \neq 0\}$. Si ce support est de cardinalité finie, alors << pas de problème >> (sauf qu'il faudrait en fait énumérer Λ_0, et utiliser la commutativité et l'associativité de l'addition pour prouver que cela marche. On va dire que ce travail a été fait au collège, ou au lycée, ou en premier cycle, ou dans votre tête à un moment ou un autre,...). Plus généralement pour toute partie finie $A \subset \Lambda$, on a donc << évidemment >> une somme $S(A) = \sum_{\lambda\in A} u_\lambda$. C'est notre point de départ et on veut s'affranchir de l'hypothèse que l'ensemble des indices est fini.

Supposons dans un premier temps $\forall\lambda\ u_\lambda \geq 0$. Il n'y a pas le choix : on conviendra que $S = S(\Lambda) = \sum_{\lambda\in\Lambda} u_\lambda$ est la borne supérieure de toutes les sommes $S(A)$ pour $A \subset \Lambda$ de cardinalité finie.(*) On aura $S \in [0, +\infty]$. Supposons $S < \infty$: il y a au plus SN éléments λ tels que $u_\lambda \geq \frac{1}{N}$. Donc le support Λ_0 est au plus dénombrable (fini ou infini).

Il faudrait maintenant prouver (en se limitant pour l'instant à ces sommes de termes positifs) des choses comme $\sum_\Lambda (u_\lambda + v_\lambda) = \sum_\Lambda u_\lambda + \sum_\Lambda v_\lambda$, $\sum_{\Lambda_1\cup\Lambda_2} u_\lambda + \sum_{\Lambda_1\cap\Lambda_2} u_\lambda = \sum_{\Lambda_1} u_\lambda + \sum_{\Lambda_2} u_\lambda$, $\sum_{\Lambda_1\times\Lambda_2} u_{\lambda_1} u_{\lambda_2} = (\sum_{\Lambda_1} u_{\lambda_1})(\sum_{\Lambda_2} u_{\lambda_2})$(**) et mieux encore $\sum_{\Lambda_1\times\Lambda_2} u_{\lambda_1,\lambda_2} = \sum_{\Lambda_1}\left(\sum_{\Lambda_2} u_{\lambda_1,\lambda_2}\right)$.(***) Toutes ces choses sont des cas particuliers des théorèmes de la théorie de l'intégrale de Lebesgue, spécialisés à la mesure de dénombrement $\mu(A) = \mathrm{card}(A)$. Évidemment on peut les

(*) à ce propos je rappelle la convention indispensable : $S(\emptyset) = 0$.

(**) pourquoi FAUT-il définir $0 \cdot \infty = 0$ dans ce contexte ?

(***) donc, il faut autoriser $u_\lambda = +\infty$ dès le début.

établir directement, je délègue à votre enthousiasme cette tâche.

Prenons maintenant les u_λ complexes. Notons $S^*(A) = \sum_{\lambda\in A}|u_\lambda|$ et supposons $S^* = S^*(\Lambda) = \sum_{\lambda\in\Lambda}|u_\lambda| < \infty$. Si c'est le cas, on dit que la famille $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ (à valeurs réelles ou complexes) est absolument sommable.

Supposons que cela soit le cas et soit $\epsilon > 0$ et soit A choisi de sorte que $S^* - \epsilon \leq S^*(A) \leq S^*$. Soit $B \supset A$ une partie finie quelconque contenant A. Alors on voit (comment ?) $|S(B) - S(A)| \leq S^*(B) - S^*(A)$ et $0 \leq S^*(B) - S^*(A) \leq \epsilon$, donc $|S(B) - S(A)| \leq \epsilon$.

Prenons maintenant $\epsilon = \frac{1}{2^n}$ et choisissons A_n tel que $S^* - \frac{1}{2^n} \leq S^*(A_n) \leq S^*$. Quitte à remplacer A_n par $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ nous pouvons supposer $A_n \subset A_{n+1}$. La suite de nombres réels $S(A_n)$ vérifie le critère de Cauchy puisque $|S(A_n) - S(A_m)| \leq \frac{1}{2^n}$ pour $m \geq n$ ($A_n \subset A_m$). Donc il existe $S = \lim S(A_n)$. Et en passant à la limite on a $|S(A_n) - S| \leq \frac{1}{2^n}$. Soit B une partie finie quelconque contenant A_n. Alors $|S(B) - S(A_n)| \leq \frac{1}{2^n}$ et $|S(A_n) - S| \leq \frac{1}{2^n}$ et donc $|S(B) - S| \leq \frac{2}{2^n}$. Ceci motive la définition suivante :

On dira que la famille de nombres complexes $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *est sommable (on parle aussi de << convergence en vrac >>) de somme* S *si pour tout* $\epsilon > 0$ *il existe une partie finie* A *telle que pour toute partie finie* $B \supset A$ *on a* $|S(B) - S| \leq \epsilon$.

On vient d'établir qu'une famille absolument sommable est sommable.

Pour une famille sommable on a unicité de S : si un autre S' marche, avec A' pour un ϵ donné, on prend $B = A \cup A'$ car il vérifie à la fois $|S(B) - S| \leq \epsilon$ et $|S(B) - S'| \leq \epsilon$ et on en déduit $|S - S'| \leq 2\epsilon$, et ceci pour tout $\epsilon > 0$. Donc $S = S'$.

Le point surprenant c'est qu'une famille sommable est toujours absolument sommable. Il suffit (pourquoi ?) de traiter le cas d'une famille réelle. Soit A_n pour $\epsilon = \frac{1}{2^n}$ et ici encore on peut imposer $A_n \subset A_{n+1}$. Soit $\Lambda_1 = \bigcup A_n$. Si $\lambda \notin \Lambda_1$ en écrivant le singleton $\{\lambda\} = (A_n \cup \{\lambda\}) \setminus A_n$ comme différence de deux ensembles contenant chacun A_n on obtient $|u_\lambda| \leq \frac{2}{2^n}$ pour tout n, et donc $u_\lambda = 0$. Donc Λ_1 contient le support Λ_0 (qui est ainsi au plus dénombrable). Si Λ_1 est de cardinalité finie alors le support est aussi de cardinalité finie, et en particulier la famille est absolument sommable. Supposons donc Λ_1 infini. On peut alors choisir une bijection $\phi : \mathbb{N} \dashrightarrow \Lambda_1$ de sorte que les A_n (on peut imposer $A_1 \neq \emptyset$) correspondent à une chaîne croissante $F_n \subset F_{n+1}$ dans $\mathbb{N}$ avec $F_n = \{0, \dots, N_n\}$, $N_1 \leq N_2 \dots\dots$, $N_n = \mathrm{card}(A_n) - 1$, $N_n \dashrightarrow \infty$. Notons $v_k = u_{\phi(k)}$.

Montrons que la série $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ est convergente. Nous le prouvons via le critère de Cauchy : supposons $m > N_n$, alors pour tout $p \geq m$ on peut écrire $v_m + \cdots + v_p = S(B_p) - S(B_{m-1})$ avec la notation $B_k = \phi(\{0, \dots, k\})$. Donc pour $N_n < m \leq p$, on a $|\sum_{m\leq k\leq p} v_k| \leq |S(B_p) - S(B_{m-1})| \leq |S(B_p) - S| + |S - S(B_{m-1})| \leq \frac{2}{2^n}$

puisque B_p et B_{m-1} contiennent A_n. (*) Donc $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ est convergente.

Si $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ n'est pas absolument convergente alors $\sum_{k=0}^{\infty} \max(v_k, 0) = +\infty$ (*) et donc $\sum_{k>N}^{\infty} \max(v_k, 0) = +\infty$ pour tout N et donc pour tout N on peut trouver $M > N$ avec $\sum_{N<k\leq M} \max(v_k, 0) \geq 1$. Prenons en particulier $N = N_2$ et définissons la partie finie B comme étant la réunion de A_2 et de ceux des λ qui correspondent aux k avec $N_2 < k \leq M$ et $v_k > 0$. Alors $S(B) - S(A_2) = \sum_{N_2<k\leq M} \max(v_k, 0) \geq 1$ ce qui est une contradiction (pourquoi ?).

La série $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ est donc absolument convergente. La famille $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est ainsi absolument sommable et donc aussi $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_1}$ qui lui est en bijection. Comme $u_\lambda = 0$ pour $\lambda \notin \Lambda_1$ on peut affirmer que $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est absolument sommable. On a donc prouvé en partie :

Théorème : *Toute famille sommable $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est absolument sommable et son support est au plus dénombrable. La somme $\sum_{\lambda\in\Lambda} u_\lambda$ au sens des familles sommables coïncide avec $\int_\Lambda u_\lambda d\mu(\lambda)$ au sens de la théorie de l'intégrale sur les espaces mesurés, avec ici μ la mesure de dénombrement sur la tribu maximale $\mathcal{P}(\Lambda)$ de toutes les parties de Λ.*

Pour la dernière affirmation, il suffit de traiter le cas réel. Puis, compte tenu que l'on sait qu'il y a absolue sommabilité, en écrivant $u_\lambda = \max(u_\lambda, 0) - (-\min(u_\lambda, 0))$ on se ramène par linéarité (que j'ai laissée en exercice pour les familles sommables, et qui est du cours d'intégration pour un espace mesuré général) au cas $\forall\lambda\ u_\lambda \geq 0$. Mais alors notre définition par la borne supérieure des sommes finies coïncident exactement avec la définition par la borne supérieure des intégrales de fonctions étagées, puisqu'une fonction étagée positive majorée par u n'est pas autre chose qu'un choix d'un ensemble fini A d'indices λ et de nombres réels v_λ pour $\lambda \in A$ avec $0 \leq v_\lambda \leq u_\lambda$. La somme la plus grande est pour $v_\lambda = u_\lambda$ autrement dit c'est S(A). Donc la définition via la théorie de l'intégrale redonne la définition via les bornes supérieures des S(A).

On peut donc considérer à ce stade que l'on a complètement réduit la théorie des familles sommables à celle de l'intégrale. En particulier on a Fubini-Tonelli etc...

Cependant il y a bien encore une ou deux choses intéressantes à dire. Soit à nouveau Λ un ensemble quelconque indexant des nombres complexes u_λ.

Théorème : *Si à chaque fois que l'on a une chaîne croissante $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ de parties finies de Λ les sommes $S(A_n)$ convergent vers une certaine limite (finie) alors la famille $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est (absolument) sommable. La réciproque est vraie.*

Comme on n'a pas dit que $\bigcup A_n$ doit contenir tout le support Λ_0 de la famille

(*) de plus $\sum_{k=0}^{\infty} v_k = \lim \sum_{k=0}^{N_n} v_k = \lim S(A_n) = S$.

(*) pourquoi ?

les limites en question ne sont pas forcément toutes égales à $\sum_{\lambda\in\Lambda} u_\lambda$.

Montrons d'abord la réciproque. Posons $\Lambda_1 = \bigcup A_n$. La famille $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est absolument sommable donc aussi $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_1}$. Soit $\epsilon > 0$ et soit $A \subset \Lambda_1$ fini tel que $\sum_{\Lambda_1\setminus A} |u_\lambda| \leq \epsilon$. Comme $A \subset \bigcup A_n$ est fini, et que les A_n forment une chaîne croissante, il existe N tel que pour $n \geq N$ on a $A \subset A_n$. Alors $|S(A_n) - S(A)| \leq \epsilon$ et donc $|S(A_n) - S(A_m)| \leq 2\epsilon$ pour $N \leq n \leq m$ et le critère de Cauchy est vérifié. La suite $S(A_n)$ est ainsi prouvée convergente.

Montrons maintenant dans le sens direct. On peut supposer la famille réelle. On raisonne par l'absurde. Si l'on avait $\sum_\Lambda |u_\lambda| = +\infty$, on aurait $\sum_\Lambda \max(u_\lambda, 0) = +\infty$, ou $\sum_\Lambda -\min(u_\lambda, 0) = +\infty$ (ou les deux). Supposons le premier cas, le deuxième se traitant de manière semblable. On peut alors construire des sommes finies parmi les $u_\lambda > 0$, arbitrairement grandes ; disons qu'elles sont indexées par des ensembles B_1, B_2, . . ., on pose alors $A_1 = B_1$, $A_2 = B_1 \cup B_2$. . ., et par construction on a $S(A_1) \leq S(A_2) \leq \cdots \leq S(A_n) \dashrightarrow +\infty$. Le théorème est démontré.

Avec cela il pourrait sembler que l'on ait dit tout ce que l'on avait à dire. Et non ! c'est compter sans Riemann qui des décennies avant que l'on se mette à roucouler avec les impressionnantes familles sommables avait démontré la seule chose réellement spectaculaire, et cette seule chose n'est même pas incorporée à la théorie des familles sommables !

Le théorème de Riemann c'est que si la série réelle $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ est une série convergente mais pas absolument convergente(*) alors pour tout nombre réel L on peut trouver une bijection ϕ de $\mathbb{N}$ telle que $L = \sum_{k=0}^{\infty} v_{\phi(k)}$.(**)

Je vais vous laisser y réfléchir. La preuve de Riemann occupe dix lignes sans aucune formule mathématique si ce n'est C (pour notre L), a (pour les $v_k \geq 0$), et b (pour les $-v_k \geq 0$).

(*) je rappelle que l'on dit alors qu'elle est semi-convergente, et que la répartition entre séries divergentes, séries absolument convergentes, et séries semi-convergentes est l'un des piliers de toute l'analyse mathématique.
(**) mais pour la « plupart » des bijections la série sera divergente, en fait.