## Le théorème de Riesz-Fischer

Théorème (1907, indépendamment par Ernst Fischer et Frigyes Riesz) : *Soit $c_n$, $n \in \mathbb{Z}$ des nombres complexes vérifiant la condition*

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 < \infty$$

*Alors il existe une fonction de carré intégrable* $f \in L^2(0, 2\pi; \frac{dx}{2\pi})$ *dont les coefficients de Fourier* $c_n(f)$ *sont les* $c_n$ *:* $\forall n \in \mathbb{Z}\ \ c_n(f) = c_n$.

Preuve : il suffit de savoir le faire lorsque l'on suppose les $c_n$ nuls pour $n < 0$, car dans le cas général on obtiendra f par $f_1 + \overline{f_2}$ avec $c_n(f_1) = c_n$ pour $n \geq 0$, $= 0$ pour $n < 0$ et $c_n(f_2) = \overline{c_{-n}}$ pour $n > 0$, $= 0$ pour $n \leq 0$. Posons

$$F_M(x) = \sum_{n=0}^{n=M} c_n e^{inx}$$

et remarquons par Cauchy-Schwarz, et par les << relations d'orthogonalité >>, pour $N \geq M$ : $\int_0^{2\pi} |F_N(x) - F_M(x)| \frac{dx}{2\pi} \leq \left(\int_0^{2\pi} |F_N(x) - F_M(x)|^2 \frac{dx}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{M<n\leq N} |c_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Comme $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$ on peut trouver $N_1$ avec $\sum_{n=N_1+1}^{\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{4}$. Puis on a $N_2 > N_1$ avec $\sum_{n=N_2+1}^{\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{16}$. Plus généralement on construit une suite strictement croissante $(N_k)$, $1 \leq k$ avec pour chaque k, $\sum_{n=N_k+1}^{\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{4^k}$.

On pose alors $g_0(x) = F_{N_1}(x)$, $g_1(x) = F_{N_2}(x) - F_{N_1}(x)$, etc..., $g_k(x) = F_{N_{k+1}}(x) - F_{N_k}(x)$. On a donc

$$F_{N_{K+1}}(x) = g_0(x) + g_1(x) + \cdots + g_K(x)$$

Définissons aussi

$$G_K(x) = |g_0(x)| + |g_1(x)| + \cdots + |g_K(x)|$$

et même

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} |g_k(x)| = \lim_{K \to \infty} G_K(x)$$

Bien sûr la valeur $+\infty$ n'est pas exclue a priori pour G(x), mais on va montrer que cela ne peut se produire que sur un ensemble de mesure nulle. Il suffit pour cela de montrer $\int_0^{2\pi} G(x) \frac{dx}{2\pi} < \infty$. Par le théorème de la convergence monotone on a

$$\int_0^{2\pi} G(x) \frac{dx}{2\pi} = \lim_{K \to \infty} \int_0^{2\pi} G_K(x) \frac{dx}{2\pi}$$

Par construction et par Cauchy-Schwarz on a pour $k \geq 1$, $\int_0^{2\pi} |g_k(x)| \frac{dx}{2\pi} \leq \left(\frac{1}{4^k}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^k}$, donc $\int_0^{2\pi} G_K(x) \frac{dx}{2\pi} \leq \int_0^{2\pi} |g_0(x)| \frac{dx}{2\pi} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^K} \leq \int_0^{2\pi} |g_0(x)| \frac{dx}{2\pi} + 1$.

Donc effectivement $\int_0^{2\pi} G(x) \frac{dx}{2\pi} < \infty$, et du coup le lieu des x avec $G(x) = +\infty$ est de mesure nulle. Pour ceux là posons $F(x) = 0$. Pour les autres la série $\sum_{k=0}^{\infty} g_k(x)$ est absolument convergente et on pose $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x)$. On a donc pour tous les x, $|F(x)| \leq G(x)$. On va montrer $\int_0^{2\pi} G(x)^2 \frac{dx}{2\pi} < \infty$ et donc on saura alors que F est de carré intégrable. À nouveau par le théorème de la convergence monotone on a

$$\int_0^{2\pi} G(x)^2 \frac{dx}{2\pi} = \lim_{K \dashrightarrow \infty} \int_0^{2\pi} G_K(x)^2 \frac{dx}{2\pi}$$

Par la propriété de norme de la norme $L^2$, on a

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^{2\pi} \Big(\sum_{0 \leq k \leq K} |g_k(x)|\Big)^2 \frac{dx}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \sum_{0 \leq k \leq K} \left(\int_0^{2\pi} |g_k(x)|^2 \frac{dx}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_0^{2\pi} |g_0(x)|^2 \frac{dx}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^K} \\
&\leq \left(\int_0^{2\pi} |g_0(x)|^2 \frac{dx}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} + 1
\end{aligned}$$

Donc la suite croissante $\int_0^{2\pi} G_K(x)^2 \frac{dx}{2\pi}$ est majorée, elle a donc une limite finie, et ainsi on a bien prouvé que G, donc aussi F est de carré intégrable.

Finalement comme $F(x)e^{-inx} = \lim_{K \dashrightarrow \infty} \sum_{0 \leq k \leq K} g_k(x)e^{-inx}$ pour presque tout x et que pour tout x on a $\left|\sum_{0 \leq k \leq K} g_k(x)e^{-inx}\right| \leq G(x)$ et que G est intégrable on peut appliquer le théorème de la convergence dominée et en déduire $c_n(F) = \lim_{K \dashrightarrow \infty} c_n(F_{N_{K+1}})$, $F_{N_{K+1}} = \sum_{0 \leq k \leq K} g_k$. Si $n < 0$ tous les $c_n(F_{N_{K+1}})$ sont nuls, et si $n \geq 0$, tous les $c_n(F_{N_{K+1}})$ sont égaux, pour K suffisamment grand, au $c_n$ dont on est parti au départ. Le théorème de Riesz-Fischer est démontré.

Théorème : *soit f une fonction intégrable mais qui n'est pas de carré intégrable. Alors* $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = +\infty$.

Preuve : sinon, soit F la fonction de carré intégrable qui est donnée par le théorème de Riesz-Fischer. Elle vérifie donc $c_n(f) = c_n(F)$ pour tous les $n \in \mathbb{Z}$. Comme F est de carré intégrable elle est intégrable, et on invoque alors le théorème d'unicité dans $L^1$ (démontré dans un cours précédent). On en déduit que $f = F$ dans $L^1$ donc presque partout, donc que f est de carré intégrable. Contradiction. L'égalité de Bessel-Parseval est donc toujours valable.