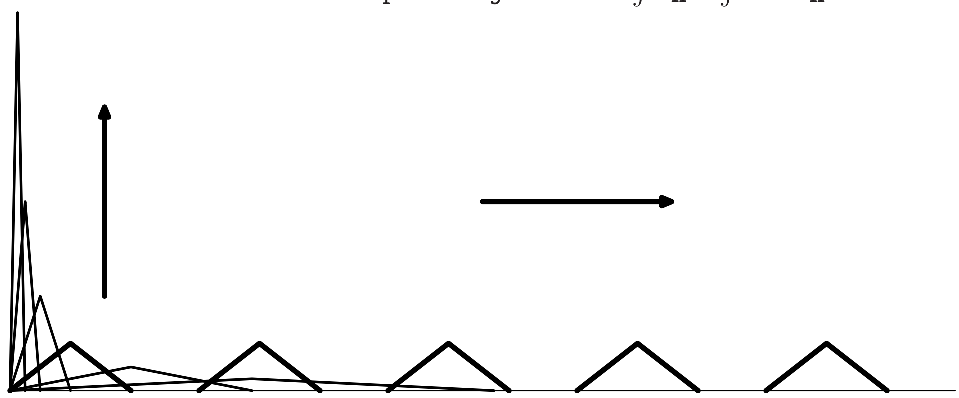
De Riemann à Lebesgue

Considérons des fonctions f_n sur l'intervalle $[0,1]$, intégrables au sens de Riemann. On suppose de plus qu'en tout x la limite $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ existe. Comment pouvons-nous démontrer le Théorème qui affirme :

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n \to \infty} f_n(x)dx \quad ?$$

Il y a plusieurs problèmes. D'abord ce << théorème >> est FAUX, comme le montre la figure suivante avec des fonctions de plus en plus effilées (en tout x on a $\lim f_n(x) = 0$ mais $\int_0^1 f_n(x)dx$ ne dépend pas de n) ou, sur $[0,\infty[$, de plus en plus aplaties. D'ailleurs il est alors encore plus facile de ne PAS avoir $\lim_{n \to \infty} \int_0^\infty f_n(x)dx = \int_0^\infty \lim_{n \to \infty} f_n(x)dx$ car il suffit de prendre $f_n(x) = f(x-n)$ avec f à support compact et d'intégrale non nulle, ce qui est aussi illustré sur la figure.

Fig. 1 - On n'a pas toujours $\lim \int f_n = \int \lim f_n$



Le deuxième problème c'est que la fonction limite n'est pas forcément intégrable au sens de Riemann : l'un des exemples les plus simples est de prendre une énumération $q_1, q_2, q_3 \ldots$ des rationnels de $[0,1]$ et de prendre pour f_n la fonction indicatrice de l'ensemble fini $\{q_1, \ldots, q_n\}$. La fonction limite est la fonction indicatrice des rationnels de $[0,1]$ et elle n'est pas R-intégrable.(*)

(*) la double limite de fonctions continues $\lim_{N \to \infty} \lim_{M \to \infty} \sqrt[M]{|\sin(\pi N!x)|}$ est la fonction indicatrice des irrationnels. MAIS : il est impossible de trouver des fonctions continues $g_n(x)$ avec la limite simple $\lim g_n(x) = 1$ pour x irrationnel et 0 sinon. Je connais une preuve, mais elle utilise un théorème avancé de Topologie, le théorème de Baire.

Bon, alors ajoutons d'emblée comme hypothèse que f est R-intégrable. Et pour interdire le comportement exhibé par la figure 1, on va imposer la condition très naturelle :

$$\exists C \quad \forall n \forall x \quad |f_n(x)| \leq C$$

Je répète la question : est-il vrai et si c'est vrai comment prouve-t-on

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n \to \infty} f_n(x)dx \quad ?$$

Cela vous paraît difficile ? Des pédagogues bien intentionnés vous ont dit que vous n'aviez qu'à admettre cette << convergence dominée >> ? Et si votre vie en dépendait ? On rigole moins maintenant ! Heureusement, je suis là.

D'abord je remplace C par 2C et les f_n par $f_n - f$ et je me ramène à montrer :

$$(\forall x \quad \lim f_n(x) = 0) \quad \Longrightarrow \lim \int_0^1 f_n(x)dx = 0 \ ,$$

toujours sous l'hypothèse que les f_n sont uniformément bornées bien sûr. Cela serait chouette si la convergence était uniforme ! Et bien, on n'a qu'à faire en sorte qu'elle le soit ! Fixons un $\epsilon > 0$ et considérons les ensembles

$$X_N(\epsilon) = \{x | \ \forall n \geq N \quad |f_n(x)| \leq \epsilon\} \ .$$

Un très bref instant de réflexion montre que $X_1(\epsilon) \subset X_2(\epsilon) \subset X_3(\epsilon) \subset \ldots$, et que de plus $\bigcup_N X_N(\epsilon) = [0,1]$. Je vais donc choisir N suffisamment grand de sorte que le complémentaire de $X_N(\epsilon)$ soit << petit >>, disons pour être précis de mesure au plus ϵ. J'écris alors :

$$n \geq N \Longrightarrow \int_0^1 |f_n(x)|dx = \int_{X_N(\epsilon)} |f_n(x)|dx + \int_{[0,1]\setminus X_N(\epsilon)} |f_n(x)|dx \leq \epsilon + M\epsilon \ ,$$

où j'ai noté $M = \sup_n \sup_x |f_n(x)|$ qui est $< \infty$ par hypothèse. Le premier ϵ c'est parce que les $|f_n(x)|$ sont $\leq \epsilon$ et le deuxième epsilon c'est parce que le complémentaire de $X_N(\epsilon)$ a une mesure au plus ϵ. On a fini. On a prouvé :

$$\lim \int_0^1 |f_n(x)|dx = 0 \quad \text{et donc aussi} \quad \lim \int_0^1 f_n(x)dx = 0$$

C'est de la g n o g n o t t e cette convergence dominée !

Où est l'arnaque ? Il n'y en a pas... cette preuve est vraiment une preuve, totalement correcte, mais, et c'est un grand MAIS, nous avons utilisé une notion de << mesure >> pour des parties $X \subset [0,1]$ assez peu contrôlables et donc en apparence assez quelconques. Peut-on associer à t o u t sous-ensemble de $[0,1]$ une mesure de sorte qu'un certain nombre de propriétés naturelles soient vérifiées (l'additivité dénombrable(*) étant ce que j'entends par << propriété naturelle >>) ? C'est là le hic, et ça donne un peu mal à la tête : la réponse dépend des axiomes que l'on utilise pour faire des mathématiques ! Si l'on

(*) il semble que c'est Émile Borel qui le premier a mis en avant cette notion fondamentale.

admet la validité de l'axiome du choix, on peut construire des parties non-mesurables dans $[0,1]$. Mais les ensembles $X_N(\epsilon)$ que nous utilisons ne sont pas si arbitraires que cela : ils appartiennent (grâce au théorème de Riemann qui nous dit que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction R-intégrable a une mesure (extérieure) nulle) à la tribu engendrée par les intervalles et par les ensembles négligeables (une notion que l'on peut définir totalement intrinsèquement en disant que A est négligeable si pour tout ϵ on peut recouvrir A par une collection dénombrable d'intervalles ouverts dont la somme des longueurs est $\leq \epsilon$). Donc le plan est clair : définir la notion de tribu, définir la tribu Borélienne, la tribu de Lebesgue qui est celle qui en plus des Boréliens contient tous les négligeables, et, grand finale, prouver l'existence d'une mesure μ, c'est-à-dire d'une fonction d'ensembles à valeurs positives vérifiant deux ou trois axiomes évidents, dont le plus signifiant est l'additivité dénombrable, avec $\mu(]a,b[) = b - a$, $\mu([0,1]) = 1$, l'appeler << mesure de Lebesgue >>, définir la notion de $\int_A f(x)d\mu(x)$ lorsque A est Lebesgue-mesurable et f R-intégrable, ce qui quasiment oblige en fait à définir $\int_{[0,1]} f(x)d\mu(x)$ pour les fonctions f mesurables quelconques, prouver des trucs utiles comme $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$, et puis prouver aussi que l'intégrale de Lebesgue donne le même résultat que celle de Riemann, et voilà, après ces quelques petites broutilles la preuve que j'ai donnée est une vraie preuve.

Le théorème de la convergence dominée

Venons-en maintenant à l'énoncé complet. On oublie les fonctions R-intégrables, on travaille avec les fonctions Lebesgues mesurables (c'est-à-dire les fonctions f tel que $f^{-1}(]u,v])$ est dans la tribu de Lebesgue pour tout u, v). On a g à valeurs positives ou nulles, intégrable : $\int_0^1 g(x)dx < \infty$. On suppose(*) $\forall n \forall x\ |f_n(x)| \leq g(x)$ et $\forall x\ \lim f_n(x) = f(x)$. Tout d'abord on démontre que f est Lebesgue-mesurable, je l'admets ici. Elle est intégrable puisque majorée par g. Quitte à remplacer g par 2g et f_n par $f_n - f$, il suffit d'établir :

$$(\forall x \quad \lim f_n(x) = 0) \quad \Longrightarrow \lim \int_0^1 |f_n(x)|dx = 0 ,$$

toujours sous l'hypothèse bien sûr qu'elles sont bornées par une fonction intégrable fixe g (le double de notre ancien g). Fixons un $\epsilon > 0$ et considérons les ensembles

$$X_N(\epsilon) = \{x|\ \forall n \geq N \quad |f_n(x)| \leq \epsilon\} .$$

Un très bref instant de réflexion montre que $X_1(\epsilon) \subset X_2(\epsilon) \subset X_3(\epsilon) \subset \ldots$, et que de plus $\bigcup_N X_N(\epsilon) = [0,1]$. Je vais donc choisir N suffisamment grand de sorte que le complémentaire $Y_N(\epsilon)$ de $X_N(\epsilon)$ soit << petit >>, et pour être précis disons :

$$\int_{Y_N(\epsilon)} g(x)dx \leq \epsilon .$$

(*) on pourrait ne supposer cela que pour presque tout x et définir f(x) = 0 pour les autres.

J'écris alors :

$$n \geq N \Longrightarrow \int_0^1 |f_n(x)|dx = \int_{X_N(\epsilon)} |f_n(x)|dx + \int_{Y_N(\epsilon)} |f_n(x)|dx \leq \epsilon + \int_{Y_N(\epsilon)} g(x)dx \leq 2\epsilon \ ,$$

On a fini. On a prouvé :

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \ n \geq N \Longrightarrow \int_0^1 |f_n(x)|dx \leq \epsilon$$

C'est de la gnognotte cette convergence dominée !

Mais comment savons-nous que nous pouvons choisir N tel que $\int_{Y_N(\epsilon)} g(x)dx \leq \epsilon$ soit vrai ? pour cela nous avons besoin de savoir que si g est une fonction intégrable positive alors ses intégrales sur des ensembles de petite mesure sont petites, uniformément. Autrement dit nous voulons(*) :

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{si } \displaystyle\int_0^1 |f(x)|dx < \infty \text{ alors} \\ \forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad |A| \leq \delta \Longrightarrow \displaystyle\int_A |f(x)|dx \leq \epsilon \end{array}}$$

Si vous connaissez le théorème de la convergence dominée mais que vous ne connaissez pas ce théorème c'est dommage. Ce théorème est très important à connaître(**) , et nous venons de voir combien il est facile d'en déduire le théorème de la convergence dominée. Alors, prouvons-le. On raisonne par l'absurde. Si il était faux pour f (que l'on peut dorénavant remplacer par $|f|$, donc $f \geq 0$) alors il existerait $\epsilon > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$, disons $\delta_n = \frac{1}{2^n}$, on puisse trouver A_n avec $|A_n| \leq \delta_n$ mais $\int_{A_n} f(x)dx \geq \epsilon$. Considérons $B_n = \bigcup_{m \geq n} A_m$, de sorte que $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \ldots$ et soit $B = \bigcap_{n \geq 1} B_n$.

Remarquons que $|B_n| \leq \sum_{m \geq n} \frac{1}{2^m} = \frac{2}{2^n}$, donc $|B| \leq \frac{2}{2^n}$ pour tout $n \geq 1$ et donc B est de mesure nulle.

Soit $C_n = B_n \setminus B$. On a donc $\int_{C_n} f(x)dx = \int_{B_n} f(x)dx \geq \int_{A_n} f(x)dx \geq \epsilon$. Soit $D_n = C_n \setminus C_{n+1}$. Comme $\bigcap_{n \geq 1} C_n = \emptyset$, on a une partition dénombrable de C_n en $\bigcup_{m \geq n} D_m$ et donc $\int_{C_n} f(x)dx = \sum_{m \geq n} \int_{D_m} f(x)dx = \sum_{m \geq n} u_m$ avec $u_m = \int_{D_m} f(x)dx$. Mais pour toute série convergente $\sum_{m=1}^{\infty} u_m$ on a $\lim_{N \to \infty} \sum_{k \geq N} u_k = 0$. Cela donne une contradiction puisque $\int_{C_n} f(x)dx \geq \epsilon$ pour tout n.

Nous avons eu besoin d'utiliser : si des parties mesurables D_m disjointes sont données alors pour toute fonction intégrable positive f on a $\int_D f(x)dx =$

(*) comme il est usuel on a noté $|A|$ la mesure de Lebesgue de A.

(**) malheureusement l'incompétence notoire de votre professeur se traduit par son incapacité à vous dire le nom, si il en existe un, de ce théorème.

$\sum_m \int_{D_m} f(x)dx$ pour $D = \bigcup_m D_m$. On traite d'abord le cas d'un ensemble d'indices m fini, ce qui se ramène au cas de deux ensembles D_1 et D_2. Mais alors $\int_D f(x)dx = \int_{[0,1]} f(x)(\mathbb{1}_{D_1}(x) + \mathbb{1}_{D_2}(x))dx$ et on s'est ramené à la linéarité de l'intégrale que je ne redémontre pas ici. Revenons au cas dénombrable. En tout cas $D \supset D_1 \cup \cdots \cup D_N$ donc $\int_D f(x)dx \geq \sum_{1\leq m\leq N} \int_{D_m} f(x)dx$ donc $\int_D f(x)dx \geq \sum_{m=1}^{\infty} \int_{D_m} f(x)dx$. Cela donne une première inégalité.

Rappelons que par définition $\int_D f(x)dx = \sup \int \phi(x)\mathbb{1}_D(x)dx$, le supremum étant pris sur les fonctions étagées avec $0 \leq \phi \leq f$. Supposons le théorème vrai pour les ϕ. Alors $\int_D \phi(x)dx = \sum_m \int_{D_m} \phi(x)dx \leq \sum_m \int_{D_m} f(x)dx$ pour toute $\phi \leq f$ par monotonie de l'intégrale. Cela donne l'inégalité dans l'autre sens.

Donc il suffit de prouver la formule pour $f = \phi$ une fonction étagée ce qui se ramène à $f = \mathbb{1}_E$ avec E une partie mesurable. La formule dit alors $|E \cap D| = \sum_m |E \cap D_m|$ ce qui n'est pas autre chose que la sigma-additivité pour la partition de $E \cap D$ en les $E \cap D_m$. Voilà on a tout démontré.

le théorème de la convergence dominée vaut aussi en supposant convergence presque partout au lieu de partout je vous en laisse la vérification.

Le théorème de la convergence monotone

On suppose $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots$ et on pose $f(x) = \lim f_n(x) \in [0, +\infty]$. La théorie de l'intégrale définit une valeur pour $\int f(x)dx$ pour toute telle f (les x avec $f(x) = \infty$ forment une partie mesurable). Le théorème de la convergence monotone affirme

$$\lim \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$$

Prouvons-le.

Certainement on a $\leq$ puisque $f_n \leq f$. Si $\int_0^1 f(x)dx < \infty$ on est dans le cadre du théorème de la convergence dominée ! donc la formule ne peut-être fausse que si $\int_0^1 f(x)dx = \infty$. Il s'agit ainsi de prouver que forcément $\lim \int_0^1 f_n(x)dx = +\infty$ si $\int_0^1 f(x)dx = \infty$, ou de manière équivalente que si les $\int_0^1 f_n(x)dx$ sont bornés alors $\int_0^1 f(x)dx < \infty$. Soit ϕ étagée avec $0 \leq \phi \leq f$ et posons $g_n = \min(f_n, \phi)$. On a $\lim g_n(x) = \phi(x)$ pour tout x(*). De plus $g_n \leq \phi$, donc par convergence dominée on a $\int_0^1 \phi(x)dx = \lim \int_0^1 g_n(x)dx \leq \lim \int_0^1 f_n(x)dx$. Donc si ces intégrales sont majorées par $M < \infty$, alors il en est de même pour $\int_0^1 \phi(x)dx$. Cela prouve par définition que f est intégrable (et aussi que $\int_0^1 f(x)dx \leq M$, donc $\int_0^1 f(x)dx \leq \sup_n \int_0^1 f_n(x)dx = \lim \int_0^1 f_n(x)dx$ et comme l'inégalité dans l'autre sens est évidente on a égalité ; mais on savait déjà car par $\int_0^1 f(x)dx < \infty$ on a convergence dominée). Le théorème de la convergence monotone est établi.

Si l'on réexamine notre preuve on en déduit le corollaire extrêmement utile

(*) vous êtes des grands maintenant, alors j'espère que vous suivez.

suivant :

> si les $f_n(x)$ forment en tout (ou presque tout) x une suite croissante positive et si de plus les intégrales $\int_0^1 f_n(x)dx$ sont bornées alors en presque tout x les $f_n(x)$ convergent vers une limite finie. Ou encore : si les $u_n(x) \geq 0$ sont telles que
>
> $$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 u_n(x)dx < \infty$$
>
> alors la somme infinie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ est presque partout finie (et bien sûr
>
> $$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 u_n(x)dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)dx\ ,$$
>
> mais cela on le sait même en cas d'une somme divergente.)

En effet, pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a $\int_0^1 f(x)dx \geq N|\{x|f(x) = +\infty\}|$, donc si l'intégrale est finie, alors $\{x|f(x) = +\infty\}$ est de mesure nulle.

Espaces mesurés, Lemme de Fatou, etc...

En fait c'est uniquement pour des raisons typographiques que je me suis limité à $[0, 1]$ et à la mesure de Lebesgue dx, nos preuves de la convergence dominée et de la convergence monotone s'appliquent mutatis mutandis au cas général d'un espace mesuré (X, μ) quelconque. Je vous laisse vous amuser à expliciter ce que cela donne pour $X = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, avec μ la mesure de dénombrement (et la tribu maximale égale à $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ou $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$.)

Pour Fatou je ne peux pas faire tout le boulot, et je n'ai pas envie d'entamer une nouvelle page. Je vous laisse le soin de vous assurer que vous connaissez l'énoncé et une preuve du fameux Lemme de Fatou. Si si, c'est très utile.