Résumé du Cours (I)

Je récapitule le contenu des six ou sept premières semaines de Cours, sans trop entrer dans le détail, peut-être en laissant de côté certaines choses. C'est juste pour aider à avoir les idées claires à ce stade du semestre.

Au départ il y a les formules de Fourier pour des coefficients $a_n(f)$, et $b_n(f)$, ou encore $c_n(f)$ que l'on peut associer à une fonction 2π-périodique et intégrable. Inscrivez-ici ces formules :

On peut motiver le fait que les formules de Fourier doivent être ce qu'elles sont en considérant un polynôme trigonométrique $P(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{1\leq n\leq N}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ et en constatant qu'elles redonnent bien les coefficients a_n et b_n (et des coefficients nuls pour $n > N$; aussi on a la convention $a_{-n} = a_n$ et $b_{-n} = -b_n$). Derrière ces calculs se trouvent des << relations d'orthogonalité >> pour les fonctions 2π-périodiques $\cos(nx)$, $\sin(nx)$, $e_n(x) = e^{inx}$, relations qui sont aussi à l'oeuvre dans l'importante identité

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |P(x)|^2\,dx = \sum_{-N\leq n\leq +N} |c_n|^2 = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{1\leq n\leq N}(|a_n|^2 + |b_n|^2)$$

Preuve (écrire petit) :

Dès maintenant on se familiarise avec le << produit scalaire hermitien >> $(f,g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$ et ses propriétés élémentaires. L'inégalité de

Cauchy-Schwarz, dont on peut donner plusieurs preuves, est :

$$|(f,g)| \leq \sqrt{(f,f)}\sqrt{(g,g)}$$

Preuve :

Elle est fondamentale. Les notations $\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|\,dx$ et $\|f\|_2 = \sqrt{(f,f)}$ sont constamment utilisées. On a : $\|\alpha f\|_1 = |\alpha|\|f\|_1$, $\|\alpha f\|_2 = |\alpha|\|f\|_2$.

$$\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1 \qquad \|f+g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2 \qquad \|f\|_1 \leq \|f\|_2$$

Preuves (écrire petit) :

À propos de Cauchy-Schwarz (valable pour tout espace mesuré), on note que l'on peut rajouter une étape intermédiaire $|(f,g)| \leq (|f|,|g|) \leq \|f\|_2\|g\|_2$, puisque $\|f\|_2 = \|\,|f|\,\|_2$, $\|g\|_2 = \|\,|g|\,\|_2$. Attention au fait que l'inégalité $\|f\|_1 \leq \|f\|_2$, c'est parce que notre espace mesuré est de masse totale 1. Sur $\mathbb{R}$ tout entier pour la mesure dx, ça ne marche pas. Mais sur $[0,2\pi]$ pour $\frac{dx}{2\pi}$ toute fonction de carré intégrable est intégrable (la réciproque étant fausse).

À propos, j'utilise dès maintenant le vocabulaire de l'intégration selon Lebesgue, puisque, bien que l'on puisse faire beaucoup de choses avec l'intégrale de Riemann, les résultats centraux du cours (théorème de Riesz-Fischer, complétude de l'espace L^2) nécessitent les outils de l'intégrale de Lebesgue.

Par ailleurs, pour f une fonction intégrable 2π-périodique, de coefficients de Fourier $c_n(f)$, $n \in \mathbb{Z}$, on écrit parfois :

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n(f)\, e^{inx} ,$$

le symbole $\sim$ ne signifiant ici pas une égalité, ou une équivalence, mais simplement rappelant que la série trigonométrique à droite est définie à partir de la fonction à gauche. Je mentionne tout de suite que l'un de nos théorèmes principaux est réciproquement que la fonction à gauche est déterminée, à l'égalité presque partout près, par sa série de Fourier (théorème d'unicité dans L^1). En ce qui concerne la validité ponctuelle :

$$f(x) \stackrel{?}{=} \lim_{N\to\infty} \sum_{-N\leq n\leq +N} c_n(f)\, e^{inx} ,$$

la toute première question est déjà de se demander si cela change quelque chose si l'on prend, par exemple $\sum_{-N\leq n\leq +N+1}$ au lieu de $\sum_{-N\leq n\leq +N}$. Non cela ne change rien, grâce au :

Lemme de Riemann-Lebesgue : pour toute fonction intégrable on a $c_n(f)\to 0$ pour $n\to+\infty$ et pour $n\to-\infty$. Plus généralement, pour tout intervalle $I\subset\mathbb{R}$ et toute fonction intégrable f par rapport à dx sur I on a $\lim_{\lambda\to+\infty}\int_I f(x)\cos(\lambda x)\,dx = 0$ et $\lim_{\lambda\to+\infty}\int_I f(x)\sin(\lambda x)\,dx = 0$.

Ce théorème fondamental est très fondamental. Il est intimement lié à la << densité L^1 >> des fonctions en escalier. Il suffit de considérer f à valeurs réelles. Dans le cas d'un intervalle borné, et d'une fonction f Riemann-intégrable on a, presque par définition de l'intégrale de Riemann, pour tout $\epsilon > 0$ donné à l'avance, l'existence de U et V en escalier avec $U \leq f \leq V$ et $\int_I (V(x) - U(x))\,dx \leq \epsilon$. Dans le cas général on a en tout cas, c'est l'un des théorèmes subtils démontrés en cours, l'existence de U en escalier avec $\int_I |f(x) - U(x)|\,dx \leq \epsilon$. J'y reviens plus loin. Pour toute fonction en escalier U, un calcul explicite montre $\int_I U(x)\,{}^{\sin}_{\cos}(\lambda x)\,dx = \mathcal{O}(\lambda^{-1})$. Par une méthode expliquée en cours, on peut alors prouver le Lemme de Riemann-Lebesgue pour toute f intégrable sur l'intervalle I. À la place des fonctions en escalier, on peut utiliser les fonctions de classe C^1 à support compact, mais montrer leur << densité >> n'est pas plus simple.

Dans le cas des coefficients de Fourier $c_n(f)$ on peut aussi obtenir $|c_n(f)|\to 0$ comme conséquence de l'inégalité de Bessel, que nous voyons plus loin, qui s'applique lorsque f est de carré intégrable, en particulier lorsque f est Riemann-intégrable.

Je reviens au problème de la convergence ponctuelle des sommes partielles $S_N(f)(x) = \sum_{-N\leq n\leq +N} c_n(f)\, e^{inx}$ vers f(x). La notion de convolution est extrêmement utile dans cette discussion. En effet on a la formule :

$$S_N(f)(x) = (D_N * f)(x)$$

avec D_N le noyau de Dirichlet. Fejér a vu qu'il était extrêmement utile de s'intéresser aux moyennes de Cesàro $\Sigma_N = \frac{1}{N}(S_0 + S_1 + \ldots S_{N-1})$, qui sont donc aussi des convolutions :

$$\Sigma_N(f)(x) = (F_N * f)(x)$$

```
 ------------------------------------------------------------
|        Inscrire ici les formules pour D_N, pour F_N,        |
|         et pour la notion de convolution f * g :            |
|                                                             |
|                                                             |
|                                                             |
|                                                             |
|                                                             |
|                                                             |
|                                                             |
|                                                             |
|                                                             |
 ------------------------------------------------------------
```

En utilisant en particulier que D_N et F_N sont paires, on a aussi, pour tout $L \in \mathbb{C}$:

$$S_N(f)(x) - L = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi D_N(t)\left(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - L\right)\,dt$$

$$\Sigma_N(f)(x) - L = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi F_N(t)\left(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - L\right)\,dt$$

On a alors deux théorèmes, le premier que l'on a envie d'appeler théorème de Dirichlet, bien que le vrai théorème de Dirichlet soit autre chose, et le second qui est un célèbre théorème de Fejér :

<u>Théorème</u> : si g est une fonction intégrable sur $]0,\pi]$ avec existence de la limite L = g(0+) à droite en 0 et existence d'une dérivée à droite en 0 : $\lim_{h\to 0^+}(g(h) - L)/h$, ou une autre condition plus faible, comme la condition de Dini $\int_0^\pi \frac{|g(h)-L|}{h}\,dh < \infty$,(*) alors

$$g(0^+) = L = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\pi D_N(t)g(t)\,dt$$

Conséquence, ce que l'on appelle théorème de Dirichlet dans les livres, mais encore une fois, ce n'est pas le théorème démontré par Dirichlet : si f est de classe C^1 par morceaux alors en tout x on a la convergence ponctuelle :

$$\lim_{N\to\infty} S_N(f)(x) = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$$

<u>Théorème (Fejér)</u> : si g est une fonction intégrable sur $]0,\pi]$ avec existence de la limite $L = g(0+)$ à droite en 0 alors

$$g(0^+) = L = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\pi F_N(t)g(t)\,dt$$

(*) il ne peut y avoir au plus qu'un L qui vérifie la condition de Dini, et un tel L peut exister sans que g(0+) n'existe. Les intégrales ont pour limite L même si g(0+) n'existe pas.

En ce qui concerne la convergence ponctuelle, si f est simplement supposée intégrable, si $l = \lim S_N(f)(x)$ existe, alors par le théorème de Cesàro on a aussi $l = \lim \Sigma_N(f)(x)$ et donc par le théorème de Fejér, si on suppose de plus que x est un point de continuité de f alors on a nécessairement $l = f(x)$.

Par ailleurs on a aussi la version uniforme du théorème de Fejér : si f est continue 2π-périodique alors les polynômes trigonométriques $\Sigma_N(f)$ convergent uniformément vers f pour $N \dashrightarrow \infty$.

On a aussi la version uniforme de la convergence des $S_N(f)$: si f est de classe C^1 par morceaux ET si f est de plus continue, alors sa série de Fourier est normalement convergente vers f : $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(f)| < \infty$, $\forall x\ f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\, e^{inx}$. Cette convergence normale se prouve en utilisant le fait que la fonction continue par morceaux f' (avec un nombre fini de points de discontinuité) est de carré intégrable donc vérifie l'inégalité de Bessel, un sujet vers lequel nous nous tournons maintenant.

Pour toute fonction f de carré intégrable on a l'Inégalité de Bessel

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx$$

Preuve : montrez

$$\sum_{-N\leq n\leq +N} |c_n(f)|^2 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)-S_N(f)(x)|^2\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx$$

Dans le contexte de la preuve de l'inégalité de Bessel, on établit une propriété fondamentale des sommes partielles $S_N(f)$ de la série de Fourier de f : parmi tous les polynômes trigonométriques de degrés au plus N, l'unique polynôme P qui minimise $\|f - P\|_2$ est $P = S_N(f)$.

L'inégalité de Bessel est en fait une égalité, dite de Bessel-Parseval, ou de Parseval tout court. Pour la preuve il faut donc montrer $\|f - S_N(f)\|_2 \dashrightarrow 0$. Comme dans la preuve du Lemme de Riemann-Lebesgue, le point crucial est la densité (ici au sens de la norme L^2) de fonctions pour lesquelles on sait montrer cela directement. Par exemple pour les fonctions continues, on a $\|g - \Sigma_N(g)\|_2 \dashrightarrow 0$ car $\Sigma_N(g)$ converge uniformément vers la fonction continue g sur $[0, 2\pi]$ et par ailleurs par la propriété de meilleure approximation on a $\|g - S_N(g)\|_2 \leq \|g - \Sigma_N(g)\|_2$. Donc pour prouver que $\|f - S_N(f)\|_2 \dashrightarrow 0$ pour toutes les fonctions de carrés intégrables, il suffit de montrer que pour toute fonction f de carré intégrable et pour tout $\epsilon > 0$ on peut trouver une fonction continue g (2π-périodique) avec $\|f - g\|_2 \leq \epsilon$. Et pour cela il suffit de trouver k en escalier avec $\|f - k\|_2 \leq \frac{1}{2}\epsilon$ car il est facile de trouver g continue avec $\|k - g\|_2 \leq \frac{1}{2}\epsilon$.

Nous avons prouvé que les fonctions en escalier étaient denses au sens L^2 dans l'espace $L^2(0, 2\pi; \frac{dx}{2\pi})$ en montrant que les parties mesurables A pour lesquelles les fonctions indicatrices $\mathbb{1}_A$ sont arbitrairement bien approchables par des fonctions en escalier au sens L^2 forment une tribu. Notre preuve repose sur l'emploi des célèbres << identités Burnoliennes >>.

Remarque : dans certains livres on construit l'espace L^2 en complétant (comme on complète $\mathbb{Q}$ pour construire $\mathbb{R}$) l'espace vectoriel des fonctions continues pour la norme $\|\cdot\|_2$. Dans cette approche la densité des fonctions continues ou des fonctions en escalier est donc une trivialité. Mais, encore faut-il alors identifier l'espace complet obtenu avec l'ensemble des classes d'équivalence pour l'égalité presque partout des fonctions Lebesgue ou Borel-mesurables et de carrés intégrables. Dans certains livres la discussion de cela n'est pas assez satisfaisante. Une fois connue la densité des fonctions en escalier on a l'important :

Théorème de continuité des translations : pour f intégrable on a $\lim_{h \dashrightarrow 0} \|f - f_h\|_1 = 0$ avec $f_h(x) = f(x - h)$. (idem pour f de carré intégrable et $\|\cdot\|_2$.)

Lorsque nous aurons le vocabulaire adapté nous aurons l'énoncé plus complet qui dit que l'application $h \dashrightarrow f_h$ est continue. En combinant le théorème de Fejér et le théorème de continuité des translations, on a montré, pour f intégrable $\lim \|f - \Sigma_N(f)\|_1 = 0$ (théorème de Fejér au sens L^1). Il en résulte :

Théorème d'unicité : si deux fonctions intégrables ont la même série de Fourier elles sont égales presque partout.

Enfin, nous avons récemment prouvé un autre théorème essentiel, en utilisant les théorèmes de l'intégration selon Lebesgue :

Théorème de Riesz-Fischer : si les nombres complexes c_n vérifient $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 < \infty$ alors il existe une fonction f de carré intégrable avec $\forall n \in \mathbb{Z} \quad c_n(f) = c_n$.

Il y a donc une bijection entre l'espace petit $l^2(\mathbb{Z})$ des suites indexées par $\mathbb{Z}$ et de carrés sommables et l'espace $L^2(0, 2\pi; \frac{dx}{2\pi})$. En ce moment nous complétons (sic) cette discussion en prouvant que ces deux espaces, munis des formes sesquilinéaires naturelles et de la norme correspondante, sont complets en tant qu'espaces métriques. En fait c'est souvent cela que l'on appelle << Théorème de Riesz-Fischer >>.