Points de Lebesgue

Version du 15-04-2006, 15h00. J'avais expliqué que ce cours était aussi une occasion d'approfondir nos connaissances en théorie de l'intégrale de Lebesgue. Le plus central est que les (classes d'équivalence pour l'égalité presque partout des) fonctions intégrables au sens de Lebesgue, ou de carrés intégrables, forment des espaces vectoriels normés complets, ce que l'on appelle en général le << théorème de Riesz-Fischer >>. Mais il n'y a pas que cela. En particulier, Lebesgue a montré que pour une fonction intégrable f, qui est 2π-périodique, on a $\lim \Sigma_N(f)(x) = f(x)$ pour presque tout x (comme d'habitude $\Sigma_N(f)$ ou $\sigma_N(f)$ est la Nième somme de Fejér). C'est l'objet de l'annexe suivante. Ici je vais prouver un autre théorème de Lebesgue : lorsque f est intégrable, alors $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est presque partout dérivable avec $F'(x) = f(x)$. Le point commun entre les deux théorèmes c'est que si x est un << point de Lebesgue >> de f alors il est << ok >> pour les deux théorèmes. Et donc, le point (sic) clé c'est que presque tout point est un point de Lebesgue.

On dire que x est un point de Lebesgue de f si(*)

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{2h}\int_{[x-h,x+h]} |f(t)-f(x)|\,dt = 0$$

C'est facile de montrer que si x_0 est un point de Lebesgue de f alors $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est dérivable au point x_0 avec $F'(x_0) = f(x_0)$. Exercice pour vous. Pour les fonctions 2π-périodiques, c'est moins facile, mais vrai, que si x_0 est un point de Lebesgue de f alors $\lim \Sigma_N(f)(x_0) = f(x_0)$. Voir annexe suivante. Bref, ici j'ai une fonction intégrable f sur un intervalle $[a,b]$ et je vais prouver que presque tout point est un point de Lebesgue de f. Quand faut y aller faut y aller. Attention, à partir d'ici ce n'est pas du pipeau.

Donc soit f intégrable sur $[a,b]$. On étend f par 0 à $\mathbb{R}$ tout entier. Pour tout x soit $M_f(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{2h}\int_{[x-h,x+h]} |f(t)|\,dt$. Pour certains x on peut avoir $M_f(x) = +\infty$. En tout cas $M_f(x) = \mathcal{O}(|x|^{-1})$ pour $|x|\to\infty$. Pour tout $C>0$ l'ensemble $A = \{x \mid M_f(x) > C\}$ est donc borné. De plus A est ouvert. Soit K un compact inclus dans A. On va prouver $|K| \le \frac{3}{C}\int_a^b |f(t)|dt$. Une fois cela fait en écrivant A comme une union d'intervalles ouverts, etc, on aura donc $|A| \le \frac{3}{C}\int_a^b |f(t)|dt$. On appelle ce genre de choses une << inégalité maximale >>. À cause du sup dans la définition de M_f sans doute, et donc du fait que l'on appelle M_f la

(*) si on modifie f dans sa classe d'équivalence on modifie l'ensemble des points de Lebesgue par un ensemble de mesure nulle.

<< fonction maximale >> associée à f. J'en reviens au compact K inclus dans $A = \{x \mid M_f(x) > C\}$. Notons $D(x,h) =]x-h, x+h[$. Un nombre fini de tels $D_j = D(x_j, h_j)$, $1 \leq j \leq N$ recouvrent notre compact K, avec, pour chaque j, $\int_{D_j} |f(t)|dt \geq C|D_j|$. On les a numérotés de sorte que $h_1 \geq h_2 \geq \ldots$. Posons $j_1 = 1$ et $E_1 = D_1$. On élimine tous les autres qui l'intersectent. Soit j_2 l'indice du premier D_j qui reste (si il y en a). Et soit $E_2 = D_{j_2}$. On élimine tous ceux qui l'intersectent. Soit j_3 l'indice du premier qui reste (si il y en a). Soit $E_3 = D_{j_3}$. Etc. ... On a donc E_1, E_2, ..., E_M, $M \leq N$, qui sont deux-à-deux disjoints. Soient E_1^*, E_2^*, etc..., les intervalles ouverts de mêmes centres, mais trois fois plus longs. Soit j un indice autre que j_1, j_2, ... Alors D_j intersecte l'un des E_k avec $j_k < j$. Donc D_j est inclus entièrement dans l'un des E_k^*. Au final K est inclus dans l'union des E_k^*, donc $|K|$ est majoré par $\sum_k |E_k^*| = 3\sum_k |E_k|$. Par ailleurs les intervalles ouverts E_k sont deux à deux disjoints donc $\sum_k \int_{E_k} |f(t)|dt \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt$. Rappelons que pour chaque D_j on a $\int_{D_j} |f(t)|dt \geq C|D_j|$ donc pour chaque E_k on a $\int_{E_k} |f(t)|dt \geq C|E_k|$. Ainsi :

$$|K| \leq 3\sum_k |E_k| \leq \frac{3}{C}\sum_k \int_{E_k} |f(t)|dt \leq \frac{3}{C}\int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt$$

L'inégalité maximale est prouvée.

Maintenant, pour tout x, posons $\omega_f(x) = \limsup_{h \to 0} \frac{1}{2h}\int_{[x-h,x+h]} |f(t) - f(x)|dt$ (il est possible d'avoir $\omega_f(x) = +\infty$). Si f est continue au point x alors $\omega_f(x) = 0$. Si g est une autre fonction intégrable on a $|f(t) - f(x)| \leq |f(t) - g(t) - (f(x) - g(x))| + |g(t) - g(x)|$ donc $\omega_f \leq \omega_{f-g} + \omega_g$. En particulier si g est continue en tout point alors $\omega_f \leq \omega_{f-g} \leq \omega_{f-g-(-g)} = \omega_f$, donc $\omega_f = \omega_{f-g}$.

On prend note de $\omega_f(x) \leq M_f(x) + |f(x)|$. Soit $\eta > 0$ et considérons $A_\eta = \{x \mid \omega_f(x) > \eta\}$. On a l'inclusion $A_\eta \subset B_1 \cup B_2$ avec $B_1 = \{M_f(x) > \frac{\eta}{2}\}$ et $B_2 = \{|f(x)| > \frac{\eta}{2}\}$. On a $\frac{\eta}{2}|B_2| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt$ donc $|B_2| \leq \frac{2}{\eta}\|f\|_1$. Par l'inégalité maximale on a $|B_1| \leq \frac{6}{\eta}\|f\|_1$. Donc $|A_\eta| \leq \frac{8}{\eta}\|f\|_1$. Remplaçons f par f − g avec g continue à support compact. On a vu que les deux fonctions ω_f et ω_{f-g} étaient identiques. Donc ce remplacement ne modifie pas A_η. Donc en fait $|A_\eta| \leq \frac{8}{\eta}\|f - g\|_1$. Mais nous savons que nous pouvons trouver des fonctions continues g, au support borné éventuellement un peu plus grand que $[a,b]$ et rendant $\int_{\mathbb{R}} |f(t) - g(t)|dt$ arbitrairement petit. Donc l'ensemble des x avec $\omega_f(x) > \eta$ est de mesure nulle. Comme $\eta > 0$ est arbitraire, l'ensemble des x avec $\omega_f(x) > 0$ est de mesure nulle. Donc pour presque tout x on a $\omega_f(x) = 0$ ce qui signifie exactement que x est un point de Lebesgue de f.

Exercice : montrer que x est un point de Lebesgue de f si et seulement si pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on a $\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} |f(t) - \lambda|dt = |f(x) - \lambda|$.

Exercice : justifier la mesurabilité des ensembles A_η dans la preuve ci-dessus (à vue de nez, ma conclusion est qu'il faut y réfléchir ; je vous délègue ce devoir de réfléchir, car j'ai une conception très démocratique des choses).