Mesures Complexes

Soit X un ensemble muni d'une tribu de sous-ensembles. Une *mesure complexe* μ est une fonction sur cette tribu, à valeurs dans $\mathbb{C}$, qui vérifie l'axiome d'additivité dénombrable : pour toute partie mesurable $A \subset X$, et pour toute partition dénombrable $A = \cup_n A_n$, $0 \le n < N$ $(1 \le N \le +\infty)$ on a :

$$\mu(A) = \sum_{0 \le n < N} \mu(A_n)$$

Lorsque $\mu(A) \in \mathbb{R}$ pour tout A on dit que μ est une *mesure signée*. À noter : une mesure positive ne peut être considérée comme une mesure signée (ou complexe) que si elle est finie ($\mu(X) < +\infty$). Les parties réelle et imaginaire d'une mesure complexe sont des mesures signées. Comme exemple (instructif) de mesure signée ou complexe, on peut prendre $X = [0,1]$ avec la tribu de Borel ou de Lebesgue et $\mu(A) = \int_A f(x)\,dx$ pour une certaine fonction $f \in L^1(0,1;dx)$. On déduit de l'axiome d'additivité les relations habituelles $\mu(\emptyset) = 0$[(*)], $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$, et $\mu(X \setminus A) = \mu(X) - \mu(A)$.

De plus, si les A_n forment une partition infinie de A, on peut les permuter arbitrairement et donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$ converge même après un réordonnancement quelconque des indices. Par un théorème connu (...j'espère) cela n'est possible que si elle est absolument convergente. On peut donc considérer la quantité finie $\sum_{0 \le n < N} |\mu(A_n)|$, puis prendre la borne supérieure $\nu(A)$ de toutes ces quantités pour toutes les partitions finies ou infinies dénombrables de A. Nous allons montrer que ν est une mesure positive ; puis dans un deuxième temps nous montrerons qu'elle est finie. On l'appelle << mesure des variations de μ >> et on la note $\nu = |\mu|$. On a $|\mu(A)| \le |\mu|(A)$ pour tout A de la tribu, mais l'inégalité peut être stricte (réfléchir à l'exemple $d\mu = f(x)dx$; à votre avis qu'est-ce que $|\mu|$?). À propos, évidemment, on ne dira pas que A est μ-négligeable si elle vérifie $\mu(A) = 0$, mais seulement sous l'hypothèse plus forte $\mu(B) = 0$ pour tout $B \subset A$, ce qui d'ailleurs équivaut à $|\mu|(A) = 0$.

Montrons que ν est effectivement une mesure positive. Notons que $\nu(\emptyset) = 0$. Supposons que l'on se donne une partition dénombrable (finie ou infinie) $A = \bigcup_\lambda B_\lambda$. On veut prouver $\nu(A) = \sum_\lambda \nu(B_\lambda)$. Donnons nous une autre par-

(*) car $\mu(\emptyset) = \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset)$; pour les mesures positives on doit rajouter explicitement l'axiome $\mu(\emptyset) = 0$. Comme pour une mesure complexe $\mu(\emptyset) \neq \infty$ a priori, on n'a pas à postuler $\mu(\emptyset) = 0$.

tition $A = \bigcup_j A_j$ de A[(**)]. Pour chaque j on a $\mu(A_j) = \sum_\lambda \mu(A_j \cap B_\lambda)$ donc $|\mu(A_j)| \leq \sum_\lambda |\mu(A_j \cap B_\lambda)|$ donc

$$\sum_j |\mu(A_j)| \leq \sum_j \sum_\lambda |\mu(A_j \cap B_\lambda)| = \sum_\lambda \sum_j |\mu(A_j \cap B_\lambda)| \leq \sum_\lambda \nu(B_\lambda) \ ,$$

l'égalité du milieu car nous manipulons des séries à termes positifs, l'inégalité de droite par définition des $\nu(B_\lambda)$. En prenant le sup sur toutes les partitions $A = \bigcup A_j$ on obtient $\nu(A) \leq \sum_\lambda \nu(B_\lambda)$.

Pour montrer l'inégalité dans l'autre sens, nous observons tout d'abord que si $\nu(B_\lambda) = +\infty$ pour au moins un λ alors en adjoignant $A \setminus B_\lambda$ à une partition de B_λ, on obtient une partition de A et donc on obtient des partitions de A rendant les sommes des modules de μ arbitrairement grandes, donc $\nu(A) = +\infty$, et donc l'identité $\nu(A) = \sum_\lambda \nu(B_\lambda)$ vaut. On supposera donc que pour tout λ, on a $\nu(B_\lambda) < \infty$. On se donne un $\epsilon > 0$, on suppose que l'ensemble des indices λ est $\mathbb{N}$ ou $\{0, 1, \ldots, N-1\}$, on se donne pour chaque B_λ une partition dénombrable $B_\lambda = \bigcup_j B_{\lambda,j}$ avec $\sum_j |\mu(B_{\lambda,j})| \geq \nu(B_\lambda) - \frac{\epsilon}{2^\lambda}$. Prises toutes ensemble ces partitions donnent une partition (dénombrable car $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable) de A : $A = \bigcup_{\lambda,j} B_{\lambda,j}$ et la somme associée $\sum_{\lambda,j} |\mu(B_{\lambda,j})|$ est $\geq \sum_\lambda (\nu(B_\lambda) - \frac{\epsilon}{2^\lambda}) \geq (\sum_\lambda \nu(B_\lambda)) - 2\epsilon$. Donc $\nu(A) \geq \sum_\lambda \nu(B_\lambda) - 2\epsilon$ et comme $\epsilon > 0$ est arbitraire $\nu(A) \geq \sum_\lambda \nu(B_\lambda)$. Finalement on a bien prouvé

$$\nu(A) = \sum_\lambda \nu(B_\lambda)$$

pour toute partition dénombrable (finie ou infinie) $A = \bigcup_\lambda B_\lambda$ d'une partie mesurable $A \subset X$. Donc $\nu = |\mu|$ est bien une mesure positive.

On a évidemment par la définition $|\mu|(X) \leq |\mathrm{Re}(\mu)|(X) + |\mathrm{Im}(\mu)|(X)$ donc pour montrer que $|\mu|$ est finie il suffira de considérer le cas des mesures signées.

Mesures Signées

Supposons donc que μ soit à valeurs réelles. Si A est une partie mesurable, qui a été partitionnée en des A_n, on peut faire l'union des A_n avec $\mu(A_n) \geq 0$, ce qui donne un certain $B \subset A$. Alors $\sum |\mu(A_n)| = \mu(B) + |\mu(C)|$ avec $C = A \setminus B$. Comme $\mu(A) = \mu(B) + \mu(C)$ on a $|\mu(C)| \leq \mu(B) + |\mu(A)|$, et donc $2\mu(B) \geq -|\mu(A)| + \sum |\mu(A_n)|$. Donc si $\nu(A) = +\infty$ alors on peut trouver $B \subset A$ avec $\mu(B)$ arbitrairement grand, disons $\mu(B) \geq 2|\mu(A)| + 1$. Mais de $\mu(A) = \mu(B) + \mu(C)$ on déduit $|\mu(C)| \geq \mu(B) - |\mu(A)|$ donc $|\mu(C)| \geq |\mu(A)| + 1$. Et comme ν est une mesure on a $\nu(B) = +\infty$ ou $\nu(C) = +\infty$.

On peut donc par récurrence, si l'on suppose $\nu(X) = +\infty$, affirmer l'existence de $A_0 = X$, $A_1 \subset A_0$, ..., $A_{n+1} \subset A_n$, ...avec pour tout n, $|\mu(A_{n+1})| \geq |\mu(A_n)| + 1$ (et $\nu(A_{n+1}) = +\infty$). Mais alors $|\mu(A_n \setminus A_{n+1})| \geq 1$ et la série $\sum_n \mu(A_n \setminus A_{n+1})$ ne

---

[(**)] en utilisant l'ensemble vide on peut toujours remplacer une partition finie par une partition infinie donc on peut supposer ici que les j parcourent $\mathbb{N}$.

peut pas être convergente ce qui contredit l'axiome d'additivité dénombrable (pour une réunion disjointe). C'est donc que l'hypothèse $\nu(X) = +\infty$ est à rejeter. On a ainsi $\nu(X) < +\infty$. Cette valeur finie s'appelle la *variation totale de* μ *sur* X.

Posons $\mu_1 = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu)$ et $\mu_2 = \frac{1}{2}(|\mu| - \mu)$. Ce sont clairement deux mesures positives finies. Et $\mu = \mu_1 - \mu_2$. Toute mesure signée est donc la différence de deux mesures positives finies. Réciproquement soit σ_1 une mesure positive finie vérifiant $\sigma_1(A) \geq \mu(A)$ pour tout A. Il est immédiat que $\sigma_2(A) = \sigma_1(A) - \mu(A)$ est une mesure positive (finie). Comme $\mu = \sigma_1 - \sigma_2$, on a clairement (?) $|\mu| \leq \sigma_1 + \sigma_2$, donc en sommant $2\mu_1 \leq 2\sigma_1$, et en soustrayant, $2\mu_2 \leq 2\sigma_2$. Cela montre que μ_1 est caractérisée comme étant << LA plus petite >> mesure positive σ_1 vérifiant $\sigma_1 \geq \mu$. Et μ_2 est LA plus petite mesure positive σ_2 vérifiant $\sigma_2 \geq -\mu$. Bien sûr $|\mu|$ est LA plus petite mesure positive minorée par $\max(\mu, -\mu)$, c'est-à-dire telle que pour tout A, $|\mu|(A) \geq |\mu(A)|$.

Comme μ peut s'écrire comme la différence de deux mesures positives, on peut définir $\int_X f(x)d\mu(x)$ de manière évidente : $= \int_X f(x)d\sigma_1(x) - \int_X f(x)d\sigma_2(x)$ et petit exercice si $\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_3 - \sigma_4$ alors $\sigma_1 + \sigma_4 = \sigma_2 + \sigma_3$ donc . . . indépendant des choix, ou on prend directement les canoniques μ_1 et μ_2. Le choix canonique est utile pour voir que $|\int_X f(x)d\mu(x)| \leq |\int_X f(x)d\mu_1(x)| + |\int_X f(x)d\mu_2(x)| \leq \int_X |f(x)|d\mu_1(x) + \int_X |f(x)|d\mu_2(x) = \int_X |f(x)|d|\mu|(x)$.

H a h n - J o r d a n

Notons à nouveau $\nu = |\mu|$ et considérons l'espace de Hilbert $L^2(X, \nu)$. Alors $f \mapsto L(f) = \int_X f(x)d\mu(x)$ est une forme linéaire continue sur $L^2(X, \nu)$, par l'inégalité que nous venons d'établir (et Cauchy-Schwarz ; rappelons que $\nu(X) < \infty$). Par le théorème de Fréchet-Riesz, il existe une fonction de carré intégrable g telle que pour toute $f \in L^2(X, \nu)$ on a $\int_X f(x)d\mu(x) = \int_X f(x)g(x)d\nu(x)$. En particulier $\mu(A) = \int_A g(x)d\nu(x)$ est réel pour tout A, donc $\int_A \mathrm{Im}(g(x))d\nu(x) = 0$ pour tout A, donc $\mathrm{Im}(g) = 0$ p.p., et on peut donc prendre g à valeurs réelles.

Soit $c > 1$ (par exemple $c = 1 + \frac{1}{n}$) et soit $A = \{x \mid g(x) \geq c\}$. Alors $\mu(A) = \int_X \mathbb{1}_A(x)g(x)d\nu(x) \geq c\nu(A)$, mais $|\mu(A)| \leq \nu(A)$. Donc en fait $\nu(A) = 0$. Par union dénombrable le lieu des x avec $g(x) > 1$ est de ν-mesure nulle. De même pour < -1. Soit maintenant $0 < a < 1$ (par exemple $a = 1 - \frac{1}{n}$) et soit $A = \{x \mid |g(x)| \leq a\}$. Alors pour toute partie $B \subset A$ on a $|\mu(B)| \leq a\nu(B)$. Donc si on fait une partition dénombrable $\cup A_n$ de A on a ensuite $\sum |\mu(A_n)| \leq a \sum_n \nu(A_n) = a\nu(A)$. Donc en prenant le sup, $\nu(A) \leq a\nu(A)$. Ici encore on trouve $\nu(A) = 0$. Finalement par union dénombrable le lieu des x avec $|g(x)| < 1$ est de ν-mesure nulle. Donc quitte à modifier g on pourra supposer que g ne prend que les deux valeurs +1 et -1.

Notons $X_1 = \{x \mid g(x) = 1\}$ et $X_2 = X \setminus X_1$. Alors pour toute partie mesurable on a $\mu(A) = \int_X \mathbb{1}_A(x)g(x)d\nu(x) = \nu(A \cap X_1) - \nu(A \cap X_2)$. Dans le même temps on a $\nu(A) = \nu(A \cap X_1) + \nu(A \cap X_2)$. Donc $\mu_1(A) = \nu(A \cap X_1)$ et $\mu_2(A) = \nu(A \cap X_2)$. Donc si $A \subset X_1$ on a $\mu(A) = \mu_1(A) = \nu(A)$ et si $A \subset X_2$ on a $\mu(A) = -\mu_2(A) = -\nu(A)$. Autrement dit on a trouvé une décomposition de X en deux sous-ensembles disjoints tels que la restriction de μ au premier est une mesure positive (finie) et la restriction de μ au second est l'opposé d'une mesure positive (finie). Une telle décomposition est dite décomposition de Hahn-Jordan de la mesure signée μ. Par exemple si $d\mu = f(x)dx$, cela revient à décomposer l'intervalle $[0, 1]$ en $\{x \mid f(x) \geq 0\} \cup \{x \mid f(x) < 0\}$.

Si l'on a une autre décomposition $X = X_1' \cup X_2'$ de type Hahn-Jordan alors pour tout $A \subset X_1 \cap X_2'$ on a $\mu(A) = 0$ (car à la fois positif et négatif) donc $X_1 \cap X_2'$ est μ-négligeable. De même $X_2 \cap X_1'$ est μ-négligeable. Donc la différence symétrique $X_1 \Delta X_1' = (X_1 \cap X_2') \cup (X_2 \cap X_1')$ est μ-négligeable, et aussi $X_2 \Delta X_2'$ (qui est la même chose...). La décomposition de Hahn-Jordan est donc unique à la modification près de X_1 et X_2 par des négligeables.

Exercice : soit λ une mesure positive finie ou infinie et f une fonction à valeurs réelles dans $L^1(X, \lambda)$. En posant $\mu(A) = \int_X \mathbb{1}_A(x)f(x)d\lambda(x)$ on définit une mesure signée. Montrer que $\nu = |\mu|$ est donnée par $d\nu = |f|d\lambda$. C'est très facile en considérant une construction directe d'une décomposition de Hahn-Jordan et en invoquant l'unicité de μ_1 et de μ_2.

Mesures complexes, encore

Reprenons le cas d'une mesure complexe μ. On peut l'écrire $\mu_1 - \mu_2 + i(\mu_3 - \mu_4)$ avec quatre mesures positives finies, et donc donner un sens à $\int_X f(x)\, d\mu(x) =$ (compléter) en montrant (exercice) que cela ne dépend pas du choix des μ_i (à partir du moment où toutes les intégrales considérées sont absolument convergentes ; prendre d'abord f à valeurs réelles). Si on prend les μ_i définies par les décompositions canoniques de $\mathrm{Re}(\mu)$ et $\mathrm{Im}(\mu)$ alors certainement chacune vérifie $\mu_i \leq \nu = |\mu|$ (car $|\mathrm{Re}(\mu)| \leq |\mu|$, ..., justifier), donc on peut définir ainsi $\int_X f(x)\, d\mu(x)$ pour toute $f \in L^1(X, \nu)$.

Supposons que f soit une fonction simple $f = \sum c_j \mathbb{1}_{A_j}$, avec les A_j deux-à-deux disjoints. Alors $\int_X f d\mu = \sum c_j \mu(A_j)$, donc $|\int_X f d\mu| \leq \sum |c_j||\mu(A_j)| \leq \sum |c_j||\mu|(A_j) = \int_X |f| d|\mu|$. Dans le cas général de $f \in L^1(X, \nu)$ il existe des fonctions simples f_n qui convergent vers f dans $L^1(X, \nu)$, donc aussi dans $L^1(X, \mu_i)$ pour chacune des μ_i puisque $\mu_i \leq |\mu|$. Donc $\int_X f d\mu = \lim \int_X f_n d\mu$. Alors $|\int_X f d\mu| \leq \liminf \int_X |f_n| d|\mu| = \lim \int_X |f_n| d|\mu| = \int_X |f| d|\mu|$ car on a aussi $|f_n| \dashrightarrow |f|$ dans $L^1(X, \nu)$.

On peut alors à nouveau considérer $f \mapsto \int_X f(x)d\mu(x)$ comme une fonctionnelle linéaire continue sur l'espace de Hilbert associé à la mesure des variations $\nu = |\mu|$. Il existe donc une fonction g à valeurs complexes telle que $\mu = g\nu$. Je vous délègue la tâche de montrer que $|g| = 1$ ν-presque partout. C'est dans le même style en un peu plus difficile que dans le cas réel. Par ailleurs vous montrerez que si λ est une mesure positive (finie ou non) et si $F \in L^1(X, \lambda)$, alors (avec des notations évidentes) $F\lambda$ est une mesure complexe dont la mesure des variations est la mesure finie $|F|\lambda$.