

Les espaces L^p

Dans ce Cours, notre intérêt principal est dans l'étude des espaces normés $L^1(0, 2\pi; \frac{dx}{2\pi})$ et $L^2(0, 2\pi; \frac{dx}{2\pi})$. Sous l'influence de mathématiciens tels que Hardy et Riesz dans la première moitié du vingtième siècle, la boîte à outils de l'Analyse s'est élargie à la considération des variantes que sont les espaces $\ll L^p \gg$. Nous n'aurons pas vraiment l'occasion de voir les espaces L^p en action, ce que nous ferons ici simplement c'est de les définir et de prouver qu'ils sont complets. Leur existence même repose sur des inégalités importantes qui généralisent Cauchy-Schwarz, les inégalités de Hölder et de Minkowski : nous commencerons par cela. Ensuite nous prouvons qu'ils sont des espaces normés complets (espaces de Banach). Il y a de plus un important théorème de dualité, mais je ne suis pas assez motivé aujourd'hui pour en rédiger une preuve. Mais en tout cas, cela sera fait à un moment ou un autre, au moins dans le cas particulier de l'espace de Hilbert L^2 .

Dans cette feuille je travaille en toute généralité sur un ensemble X , avec une tribu et une mesure μ . Je ne suppose pas que μ soit une mesure finie, donc par exemple on peut avoir $X = \mathbb{R}$ et $d\mu = dx$, et bien sûr il y aussi notre exemple favori $X = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et $d\mu = \frac{dx}{2\pi}$ dans ce cas X est de masse totale 1 et on aura des inclusions naturelles $L^{p_2} \subset L^{p_1}$ pour $p_2 > p_1$, qui généralisent $L^2 \subset L^1$. Mais pour $X = \mathbb{R}$, $d\mu = dx$, il n'y a pas de telles inclusions.

Sous-jacent à toute notre discussion, il y a la notion de convexité; et on pourrait beaucoup développer ce thème (théorie des espaces localement convexes). Je me contente ici de vous rappeler que lorsqu'une fonction f vérifie $f'' \geq 0$ alors $f(ux + vy) \leq uf(x) + vf(y)$ pour $u + v = 1$, $0 \leq u \leq 1$. On va prendre $f(x) = e^x$, et $u = \frac{1}{p}$ avec $p > 1$. On écrit aussi $v = 1 - u = \frac{1}{q}$ avec $q > 1$ et on dit que (p, q) est une paire d'exposants conjugués. Si on voulait étendre à $p = 1$ il faudrait alors $q = \infty$ pour que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Mais justement ce cas limite se trouve avoir dans le contexte des espaces L^p un comportement différent donc nous nous occuperons ici seulement du cas $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$. Pour $p = 2$ l'exposant conjugué est $q = 2$.

En posant $e^x = a^p$, $e^y = b^q$, donc $ux = \frac{1}{p}x = \log(a)$, $vy = \log(b)$, on obtient, pour $0 < a, b < +\infty$:

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \quad (0 \leq a \leq +\infty, 0 \leq b \leq +\infty, p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$$

Les cas $a = 0$ ou $+\infty$ ou $b = 0$ ou $+\infty$ nécessitent un examen particulier, et on vérifie que cela marche (avec la convention $0 \cdot \infty = 0$ toujours utilisée en théorie de l'intégration). Il est important de vérifier ces cas limites car nous

voulons appliquer cette inégalité aux valeurs $a = |f(x)|$ et $b = |g(x)|$ prises par les valeurs absolues (modules) de deux fonctions mesurables sur X , donc certainement nous ne voulons pas exclure la valeur 0, et aussi il est commode de ne pas exclure la valeur $+\infty$. En intégrant nous obtenons

$$\int_X |f(x)g(x)|d\mu(x) \leq \frac{1}{p} \int_X |f(x)|^p d\mu(x) + \frac{1}{q} \int_X |g(x)|^q d\mu(x)$$

Supposons $f \in \mathcal{L}^p$, c'est-à-dire $\int_X |f(x)|^p d\mu(x) < \infty$ et $g \in \mathcal{L}^q$, c'est-à-dire $\int_X |g(x)|^q d\mu(x) < \infty$. Nous voyons en tout cas que $\int_X |f(x)g(x)|d\mu(x) < \infty$, donc $fg \in \mathcal{L}^1$. Plus précisément posons $\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p}$ et idem pour $\|g\|_q$. Remarquons l'homogénéité : $(*) \quad \|\alpha \cdot f\|_p = |\alpha| \|f\|_p$, $\|\beta \cdot g\|_q = |\beta| \|g\|_q$. Remplaçons f par $f_1 = \frac{f}{\|f\|_p}$, bien sûr cela nous ne pouvons le faire que si f n'est pas presque partout nulle, et aussi si g n'est pas presque partout nulle, remplaçons g par $g_1 = \frac{g}{\|g\|_q}$. Vérifiez que $\|f_1\|_p = 1$ et $\|g_1\|_q = 1$, donc par l'inégalité ci-dessus $\|f_1 g_1\|_1 \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, donc :

Inégalité de Hölder : $\int_X |f(x)g(x)|d\mu(x) \leq \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g(x)|^q d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}}$

Si f ou g est presque partout nulle, alors le produit fg l'est aussi, le terme de gauche vaut 0 et l'inégalité est valable. Si $\|f\|_p = \infty$ et si g n'est pas presque partout nulle le terme de droite vaut $+\infty$ et l'inégalité est aussi valable. Bref, l'inégalité est toujours valable. Mais bien sûr c'est principalement pour $\|f\|_p < \infty$, et $\|g\|_q < \infty$ qu'elle est intéressante, et alors on a donc $fg \in \mathcal{L}^1$ et on peut écrire :

$$\left| \int_X f(x)g(x)d\mu(x) \right| \leq \int_X |f(x)g(x)|d\mu(x) \leq \|f\|_p \|g\|_q < +\infty$$

Remarquez que pour $p = q = 2$ on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz. À partir de l'inégalité de Hölder, on va prouver l'inégalité de Minkowski :

Inégalité de Minkowski : $\|f_1 + f_2\|_p \leq \|f_1\|_p + \|f_2\|_p \quad (\|f_1\|_p < \infty, \|f_2\|_p < \infty)$

À propos, pour que $f_1 + f_2$ existe on doit exclure des cas comme $+\infty + (-\infty)$; pour cela on peut supposer $f_1, f_2 \geq 0$, ou encore supposer que f_1 et f_2 sont toutes deux presque partout finies. Avec $\|f_1\|_p < \infty$, $\|f_2\|_p < \infty$ on est bien dans ce deuxième cas de figure. Ensuite, $|f_1 + f_2| \leq |f_1| + |f_2|$ et $\|f_1\|_p = \||f_1|\|_p$, $\|f_2\|_p = \||f_2|\|_p$, donc on peut pour la preuve remplacer f_1 par $|f_1|$, f_2 par $|f_2|$, ce qui revient à supposer $f_1 \geq 0$, $f_2 \geq 0$. Ensuite on écrit : $(**)$

$$\int_X f_1 \cdot (f_1 + f_2)^{p-1} d\mu(x) \leq \|f_1\|_p \left(\int_X (f_1 + f_2)^{qp-q} d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}}$$

$(*)$ la règle $0 \cdot \infty = 0$ fait que cela marche aussi si $\|f\|_p = +\infty$.

$(**)$ remarque : $qp - q = p$.

$$\int_X f_2 \cdot (f_1 + f_2)^{p-1} d\mu(x) \leq \|f_2\|_p \left(\int_X (f_1 + f_2)^{qp-q} d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\int_X (f_1 + f_2)^p d\mu(x) \leq (\|f_1\|_p + \|f_2\|_p) \left(\int_X (f_1 + f_2)^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}}$$

Ici il y a un piège dans la rédaction. SI ON SUPPOSE $\int_X (f_1 + f_2)^p d\mu(x) < \infty$, ALORS on peut diviser des deux côtés et on obtient effectivement :

$$\|f_1 + f_2\|_p = \left(\int_X (f_1 + f_2)^p d\mu(x) \right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \|f_1\|_p + \|f_2\|_p$$

Mais il faut D'ABORD justifier $\int_X (f_1 + f_2)^p d\mu(x) < \infty$ (toujours sous l'hypothèse $f_1, f_2 \geq 0$). Par exemple : $(f_1 + f_2)^p \leq (2 \max(f_1, f_2))^p = 2^p \max(f_1^p, f_2^p) \leq 2^p (f_1^p + f_2^p)$ donc effectivement $\int_X (f_1 + f_2)^p d\mu(x) < \infty$ si $\int_X f_1^p d\mu(x) < \infty$ et $\int_X f_2^p d\mu(x) < \infty$.

Remarque : si je ne m'abuse les vrais inégalités de Hölder et de Minkowski portent sur des sommes finies (on les retrouve en prenant pour X un ensemble fini muni de la mesure de dénombrement.) C'est F. Riesz qui a prouvé la version avec des intégrales (probablement d'abord pour $X = \mathbb{R}$ ou un intervalle, et $d\mu = dx$). L'inégalité de Minkowski donne $\|\alpha f + \beta g\|_p \leq |\alpha| \|f\|_p + |\beta| \|g\|_p$, et en définissant L^p comme le quotient de \mathcal{L}^p pour la relation d'équivalence donnée par l'égalité presque partout on obtient un espace vectoriel normé. Aussi, on a par récurrence $\|f_1 + f_2 + \dots + f_N\|_p \leq \|f_1\|_p + \dots + \|f_N\|_p$. Nous allons montrer :

Théorème : $L^p(X, \mu)$ est un espace de Banach.

Autrement dit L^p est complet comme espace métrique. La preuve est très semblable à celle que nous avons donnée pour L^1 et laissée en exercice pour L^2 . Je considère une suite de Cauchy (f_n) , $n = 1, 2, \dots$. Je rappelle que cela veut dire $\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{n, m \geq N} \|f_n - f_m\|_p = 0$. Il y a un exercice classique dans les espaces métriques qui demande de montrer que si une suite de Cauchy a une suite extraite convergente elle est elle-même convergente. Donc on va juste se contenter de construire une suite extraite convergente. D'abord on prend $N_1 < N_2 < N_3 < \dots$ tels que $\sup_{n, m \geq N_k} \|f_n - f_m\|_p \leq \frac{1}{2^k}$. On pose (*) alors $g_0(x) = f_{N_1}(x)$, $g_1(x) = f_{N_2}(x) - f_{N_1}(x)$, etc..., $g_k(x) = f_{N_{k+1}}(x) - f_{N_k}(x)$. On a donc

$$f_{N_{k+1}}(x) = g_0(x) + g_1(x) + \dots + g_k(x)$$

Définissons aussi $G_k(x) = |g_0(x)| + |g_1(x)| + \dots + |g_k(x)|$ et même $G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} |g_k(x)|$. Par le théorème de la convergence monotone on a :

$$\int_X G(x)^p d\mu(x) = \lim_{K \rightarrow \infty} \int_X \left(\sum_{k=0}^K |g_k(x)| \right)^p d\mu(x)$$

et par l'inégalité de Minkowski :

$$\int_X \left(\sum_{k=0}^K |g_k(x)| \right)^p d\mu(x) \leq (\|g_0\|_p + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^K})^p < (\|g_0\|_p + 1)^p$$

(*) petite subtilité : on a imposé à chaque f_n d'être partout finie. Pourquoi ?

Donc $\int_X G(x)^p d\mu(x) \leq (\|g_0\|_p + 1)^p < \infty$ et du coup le lieu des x avec $G(x) = +\infty$ est de mesure nulle. Pour ceux là posons $F(x) = 0$. Pour les autres la série $\sum_{k=0}^{\infty} g_k(x)$ est absolument convergente et on pose $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x)$. On a donc pour tous les x , $|F(x)| \leq G(x)$ donc $F \in L^p$, puisque l'on a vu $G \in L^p$. De plus pour presque tout x on a $F(x) = f_{N_{K+1}}(x) + \sum_{j=K+1}^{\infty} g_j(x)$ donc presque partout (**):

$$|F(x) - f_{N_{K+1}}(x)| \leq \sum_{j=K+1}^{\infty} |g_j(x)|$$

et donc par convergence monotone et par Minkowski :

$$\begin{aligned} \int_X |F(x) - f_{N_{K+1}}(x)|^p d\mu(x) &\leq \lim_{L \rightarrow \infty} \int_X \left(\sum_{j=K+1}^L |g_j(x)| \right)^p d\mu(x) \\ &\leq \lim_{L \rightarrow \infty} (\|g_{K+1}\|_p + \dots + \|g_L\|_p)^p \leq \left(\frac{1}{2^K}\right)^p \end{aligned}$$

Donc $\|F - f_{N_{K+1}}\|_p \leq \frac{1}{2^K}$ et ainsi F est la limite de la suite f_{N_k} au sens L^p , donc aussi la limite de la suite f_n puisque celle-ci est une suite de Cauchy.

Cette preuve nous a fourni une information très utile : de toute suite (f_n) convergente dans L^p , de limite F au sens L^p , on peut extraire une sous-suite f_{n_k} de sorte que pour presque tout x on a convergence ponctuelle $\lim f_{n_k}(x) = F(x)$. En effet la fonction F de la preuve ci-dessus est forcément identique (dans L^p , donc au sens du presque partout) avec celle du présent paragraphe car dans un espace métrique une suite ne peut avoir qu'une seule limite. En général on ne peut pas dire plus, mais dans le cas particulier des séries de Fourier, Carleson (prix Abel 2006) a démontré (1965-1966) que la série de Fourier d'une fonction f de $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}; \frac{dx}{2\pi})$ non seulement converge au sens L^2 vers f , on a même presque partout $\lim S_N(f)(x) = f(x)$ (vrai (Carleson-Hunt) pour $f \in L^p$, $p > 1$; faux (Kolmogorov 1922) pour certaines $f \in L^1$).

Bon, considérons pour conclure le cas particulier d'un espace de masse 1 : $\mu(X) = 1$. Alors en prenant dans l'inégalité de Hölder $f \in \mathcal{L}^p$ et $g = 1$ on obtient $\|f\|_1 \leq \|f\|_p$. Donc $\mathcal{L}^p \subset \mathcal{L}^1$ et en passant au quotient on peut si l'on veut considérer $L^p \subset L^1$ (mais comme je l'ai dit déjà je préfère voir cette inclusion comme une flèche injective). Plus généralement supposons $1 \leq p_1 < p_2$, et posons $p = \frac{p_2}{p_1}$ de sorte que $p > 1$. Soit f une fonction mesurable et appliquons l'inégalité de Hölder à $|f|^{p_1}$ et 1 pour le couple d'exposants (p, q) , $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On obtient $(\|f\|_{p_1})^{p_1} = \| |f|^{p_1} \|_1 \leq \| |f|^{p_1} \|_p = (\|f\|_{p_2})^{p_1}$ donc $\|f\|_{p_1} \leq \|f\|_{p_2}$. On a ainsi, pour $1 \leq p_1 < p_2$: $\mathcal{L}^{p_2} \subset \mathcal{L}^{p_1}$ et, si l'on veut, $L^{p_2} \subset L^{p_1}$.

Lorsque X n'est plus de masse totale 1 mais toujours de masse finie, ces inclusions subsistent, et sont continues pour les topologies définies par les normes $\|\cdot\|_p$, la seule différence, c'est que $\|f\|_{p_1} \leq \|f\|_{p_2}$ devient $\|f\|_{p_1} \leq \mu(X)^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}} \|f\|_{p_2}$.

(**) en fait partout, pourquoi?