Hellinger-Toeplitz-Landau-Riesz

Théorème : *Soit* X *un espace mesuré* σ*-fini. Soit* g *telle que* fg *est dans* L^1 *pour toute* f *dans* L^p. *Alors* g *est dans* L^q *(*$p \geq 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*).*

À propos je n'ai pas encore parlé de $L^\infty(X, \mu)$. Ses éléments sont les (classes d'équivalences de) fonctions essentiellement bornées. Une fonction mesurable g est dite essentiellement bornée si il existe $C < \infty$ tel que $\mu(\{x \mid |g(x)| > C\}) = 0$. Si c'est le cas l'ensemble des $C \geq 0$ possibles possède un plus petit élément qui est noté $\|g\|_\infty$. Cela définit une norme sur l'espace vectoriel des classes de telles fonctions, et cet espace est complet. Ces affirmations forment un très bon exercice instructif. Problème plus ambitieux : adaptez la méthode de la fin de l'annexe précédente (pour $1 < p < 2$) et prouvez que pour X sigma-fini le dual de $L^1(X, \mu)$ est $L^\infty(X, \mu)$. Prouvez aussi : *Soit* X *avec* $0 < \mu(X) < \infty$. *Pour toute fonction mesurable* f *sur* X *on a* $\|f\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \|f\|_p$.

Le dual de $L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$ est (en général) énorme : c'est l'espace des fonctions $m : \mathcal{B} \to \mathbb{C}$ finiment additives, de variations totales bornées ($\sup_{A \in \mathcal{B}} |m(A)| < \infty$), et absolument continues ($\mu(A) = 0 \Rightarrow m(A) = 0$). (*cf.* Dunford-Schwartz ou Yosida)

Le théorème est vrai mais trivial pour $p = \infty$, $q = 1$ (prendre $f = 1$). Pour montrer ce qui peut ne pas aller lorsque $1 \leq p < \infty$ sans l'hypothèse << X est σ-fini >>, prenons un ensemble non vide X, prenons comme tribu $\mathcal{B} = \mathcal{P}(X)$ et comme mesure $\mu(A) = +\infty$ sauf pour $A = \emptyset$. Alors $L^p(X, \mu) = \{0\}$, pour $1 \leq p < \infty$ et $L^\infty(X, \mu)$ est l'espace des fonctions bornées. Donc, pour $1 \leq p < \infty$ n'importe quelle fonction g vérifie l'hypothèse du théorème. Pour $p > 1$ seule la fonction nulle obéit à sa conclusion, et pour $p = 1$ seules les fonctions bornées. Donc le théorème est faux pour $p > 1$ et si X est de cardinalité infinie il est aussi faux pour $p = 1$.

Comme cas particulier du théorème, prenons $X = \mathbb{N}$, tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, mesure de dénombrement. Il s'agit de prouver que si $\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n y_n| < \infty$ dès que $\sum_n |x_n|^p < \infty$ alors $\sum_n |y_n|^q < \infty$ (pour $p = 1$ lire : alors $\sup_n |y_n| < \infty$). Pour $p = q = 2$ cela fut établi par Hellinger et Toeplitz, et pour $p \geq 1$ (ou peut-être $p > 1$) par Landau.

Je commence par $p = 1$. Soit (y_n) une suite avec $\sup_n |y_n| = \infty$. Il y a une suite extraite avec $|y_{n_k}| > 2^k$. Posons $x_{n_k} = 2^{-k}$ et 0 pour les autres. Alors $\sum_n |x_n| < \infty$ mais $\sum_n |x_n y_n| = \infty$.

Prenons $1 < p < \infty$. Soit $(y_n)_{n \geq 0}$ une suite avec $\sum_n |y_n|^q = \infty$. On va construire (x_n) de sorte que $\sum_n |x_n|^p < \infty$ mais $\sum_n |x_n y_n| = \infty$. On peut toujours remplacer

y_0 par 1 de sorte que $y_0 \neq 0$. On pose :

$$x_n = \frac{|y_n|^{q-1}}{|y_0|^q + \cdots + |y_n|^q}$$

Alors $|x_n y_n| = |y_n|^q/(|y_0|^q + \cdots + |y_n|^q)$ et, compte tenu de $pq - p = q$, $x_n^p = |y_n|^q/(|y_0|^q + \cdots + |y_n|^q)^p$. On est donc ramené au Lemme :

Lemme : *si une série $\sum_n u_n$ à termes positifs ou nuls diverge alors la série de terme général $u_n/(u_0 + \cdots + u_n)$ diverge et la série de terme général $u_n/(u_0 + \cdots + u_n)^p$ converge pour $p > 1$. On a supposé $u_0 > 0$ pour assurer que les dénominateurs sont tous non nuls.*

Preuve : la somme pour $M \leq n \leq N$ des $u_n/(u_0 + \cdots + u_n)$ est minorée par $\sum_{M \leq n \leq N} u_n / \sum_{0 \leq n \leq N} u_n$. Pour M fixé quelconque, cela tend vers 1 pour $N \to \infty$. Donc $\sum_{n \geq M} u_n/(u_0 + \cdots + u_n) \geq 1$ pour tout M et donc la série de terme général $u_n/(u_0 + \cdots + u_n)$ diverge. Par contre :

$$n \geq 1 \Longrightarrow \quad \frac{u_n}{(u_0 + \cdots + u_n)^p} \leq \int_{u_0 + \cdots + u_{n-1}}^{u_0 + \cdots + u_n} \frac{dt}{t^p}$$

Donc $\sum_{n \geq 1} u_n/(u_0 + \cdots + u_n)^p \leq \int_{u_0}^{\infty} t^{-p}\, dt < \infty$.

Cela termine la preuve de Hellinger-Toeplitz-Landau. Je passe maintenant à la version plus générale de Riesz avec les intégrales sur un espace mesuré sigma-fini (j'imagine que Riesz a, au moins initialement, traité uniquement $\mathbb{R}$ ou un intervalle avec la mesure de Lebesgue.) On va commencer par un Lemme :

Lemme : *soit X σ-fini et $p > 1$. Si toute fonction L^p est L^1 alors $\mu(X) < \infty$.*

Preuve : supposons $\mu(X) = +\infty$. Comme X est sigma-fini on peut l'écrire comme une union disjointe de X_n avec $\mu(X_n) = u_n$, $0 < u_n < \infty$ et $\sum_n u_n = \infty$. Considérons la fonction qui vaut $(u_0 + u_1 + \cdots + u_n)^{-1}$ sur X_n. Par le Lemme précédent cette fonction est L^p et n'est pas L^1.

Maintenant soit g (partout finie) avec la propriété que gf est L^1 pour toute fonction f qui est L^p ($p > 1$ fixé). Considérons la fonction k avec $k(x) = 2^j$ lorsque $2^j \leq |g(x)| < 2^{j+1}$ ($j \in \mathbb{Z}$) et $k(x) = 0$ lorsque $g(x) = 0$. Alors $k \leq |g|$ donc k a la même propriété que g. De plus $|g| \leq 2k$, donc il suffit de montrer que k est L^q. Soit $A_j = \{x \mid k(x) = 2^j\}$. Comme X est sigma-fini, A_j aussi. Supposons $A_j \neq \emptyset$. Toute fonction sur A_j s'étend par zéro à X. Toute f sur A_j qui est L^p est telle que fk, c'est-à-dire $2^j f$ est L^1. Par le Lemme, on en déduit $\mu(A_j) < \infty$. Si il n'y a qu'un nombre fini de j avec $\mu(A_j) > 0$, $k \in L^q$ est immédiat. Sinon, on renumérote $B_0 = A_{j_0}$, etc..., ceux de mesure non nulle ($\mathbb{Z}$ est dénombrable !). Disons ensuite que B_n est de mesure $\mu_n > 0$ et que k prend sur B_n la valeur k_n. Alors par notre hypothèse dès que $\sum_{n \geq 0} |f_n|^p \mu_n < \infty$ on a $\sum_{n \geq 0} |f_n| k_n \mu_n < \infty$. Posons $x_n = f_n(\mu_n)^{1/p}$, $y_n = k_n(\mu_n)^{1/q}$. Alors dès que $\sum_{n \geq 0} |x_n|^p < \infty$ on a $\sum_{n \geq 0} |x_n y_n| < \infty$. Par ce qui précède on a $\sum_{n \geq 0} y_n^q < \infty$, donc on obtient bien $\int_X k(x)^q d\mu(x) < \infty$. Ceci termine la preuve pour $p > 1$. Il n'y a plus la place pour $p = 1$ et je le laisse en exercice.