

Phénomène de Gibbs

Dans les graphes suivants on a représenté pour $N = 20$ et $N = 60$ les sommes partielles $S_N(x) = \sum_{k=1}^N \frac{\sin kx}{k}$ de la série de Fourier de la fonction impaire 2π -périodique qui vaut $\frac{\pi-x}{2}$ pour $0 < x < 2\pi$.

FIG. 2 - Un graphe de S_{20} (les axes ne sont pas à la même échelle)

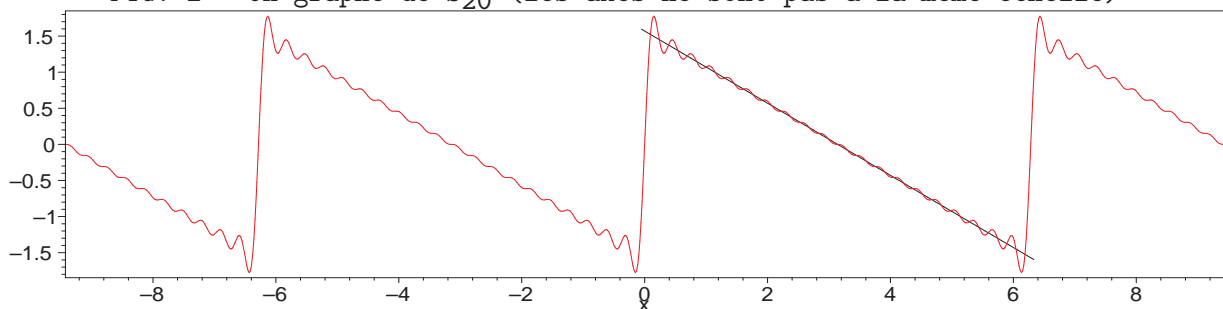
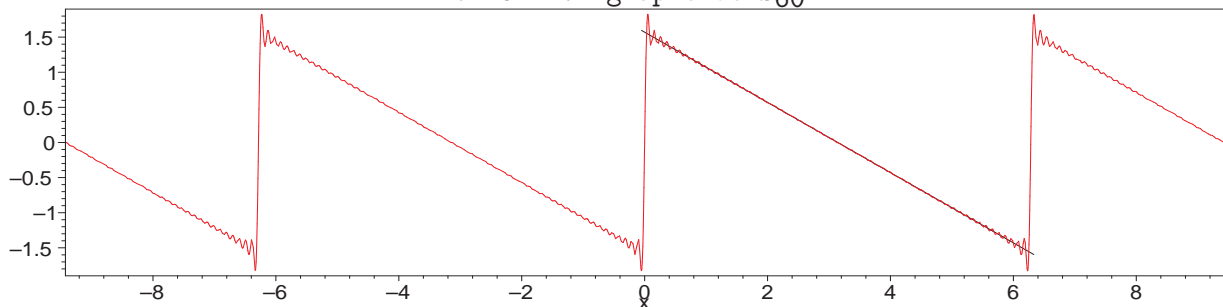


FIG. 3 - Un graphe de S_{60}

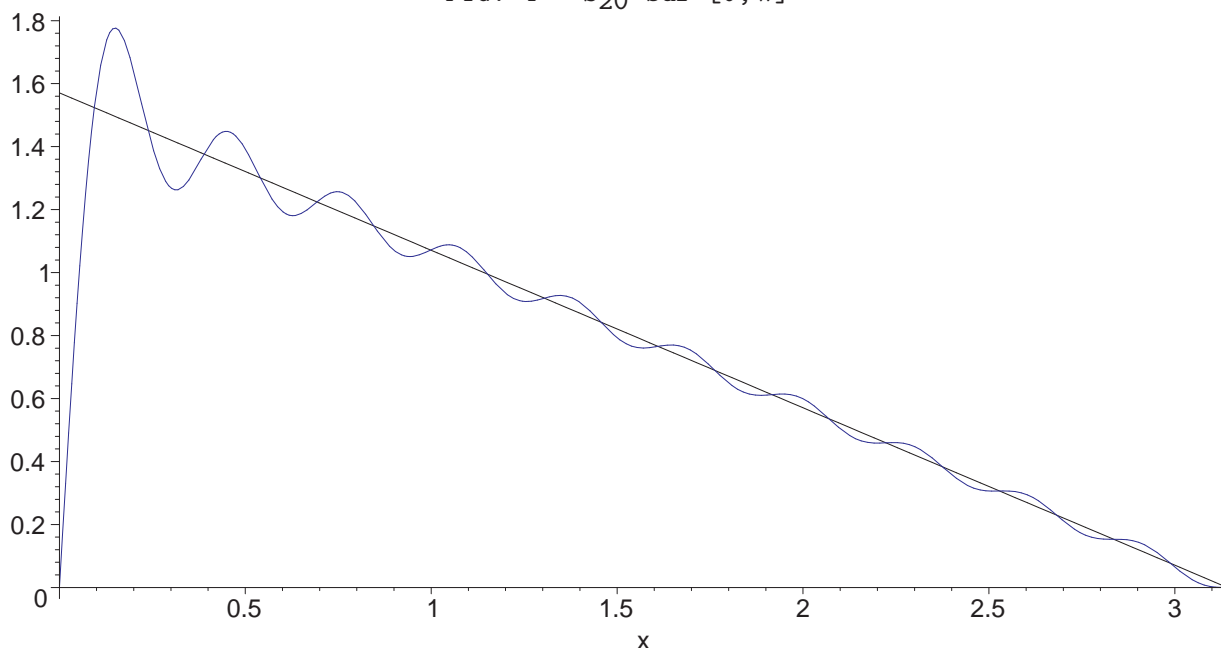


Le « phénomène de Gibbs » saute aux yeux : les graphes des sommes partielles descendent un peu plus bas à gauche que $f(0^-) = -\frac{\pi}{2}$ et montent ensuite un peu plus haut que $f(0^+) = +\frac{\pi}{2}$. Nous verrons en fait que le premier maximum (local) du graphe de S_N (qui est en fait son maximum global) est pour $N \gg 1$ presque égal à $\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x} dx \approx 1,8519$. Ceci est supérieur d'environ 18% à $f(0^+) = \frac{\pi}{2}$ (ou plus précisément et pour l'exprimer d'une manière plus universelle l'écart à $\frac{1}{2}(f(0^+) + f(0^-))$ est supérieur d'environ 18% à $\frac{1}{2}(f(0^+) - f(0^-))$).

Il n'y a pas là un « phénomène » mathématique bien mystérieux, et son analyse ne nécessite que des outils élémentaires. D'ailleurs bien que la contribution de Gibbs date de 1899, déjà en 1848, un dénommé Wilbraham en avait fait mention. Si la contribution de Gibbs a plus fait date, c'est pour des raisons sociologiques : il a trouvé un public qui a fait écho à son travail. Josiah Willard Gibbs (1839-1903) est célèbre pour ses travaux fondateurs en thermodynamique et physique statistique, et il est l'un des rares physiciens théo-

riciens de renom mondial en activité aux États-Unis au 19ième siècle. Son article de 1899 répondait à un compte rendu l'année précédente par Michelson (*) de la construction d'une machine traceuse de courbes, utilisée en particulier pour dessiner des graphes de sommes de sinus et cosinus. Testée sur des séries de Fourier de fonctions avec des discontinuités, on observait systématiquement un saut du dernier minima au premier maxima (ou le contraire) en excès de 18% par rapport à la discontinuité.

FIG. 4 - S_{20} sur $[0, \pi]$



Signalons d'abord une propriété manifeste et curieuse des sommes $S_N(x) = \sum_{1 \leq k \leq N} \frac{\sin(kx)}{k}$ c'est que visiblement pour $0 < x < \pi$ on a $S_N(x) > 0$. (*) Une surprenante démonstration par récurrence sur N est possible, la voici : d'abord on a besoin de la dérivée $S'_N(x)$. Clairement :

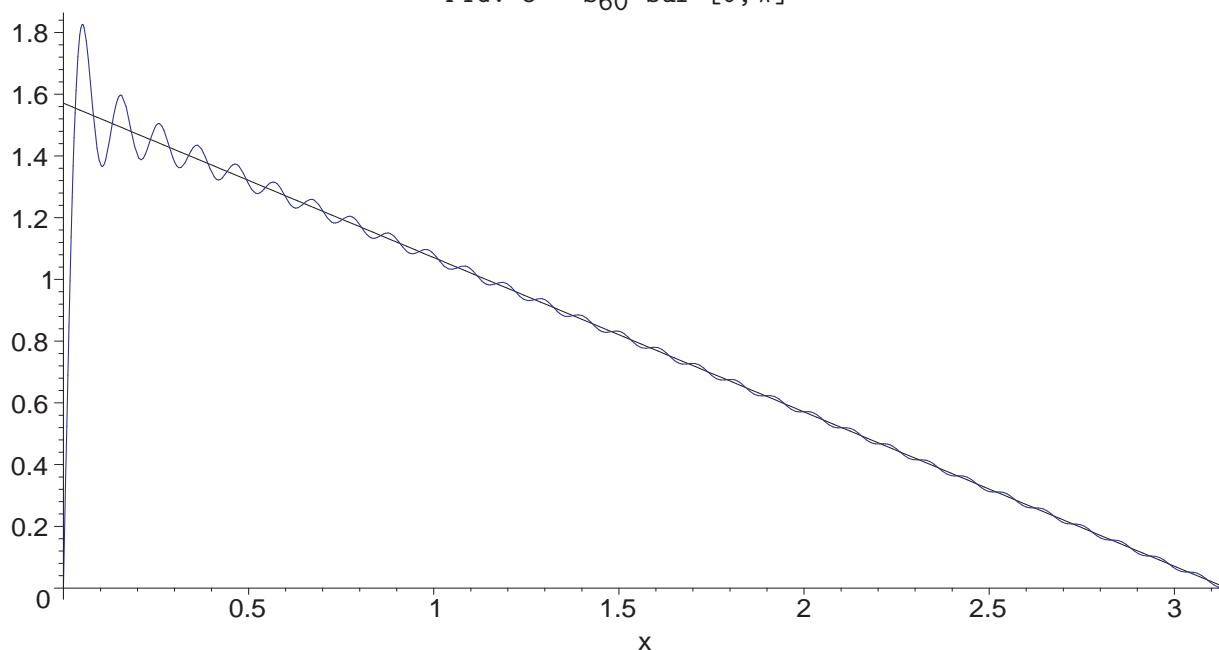
$$S'_N(x) = \cos(x) + \cos(2x) + \dots + \cos(Nx) = \frac{D_N(x) - 1}{2} = \frac{1}{2} \frac{\sin((N + \frac{1}{2})x) - \sin(\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} = \frac{\cos(\frac{N+1}{2}x) \sin(\frac{N}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}$$

Pour $0 < x < 2\pi$, on a $\sin(\frac{x}{2}) > 0$, donc le signe de $S'_N(x)$ est celui de

(*) celui de la fameuse expérience d'interférométrie optique de Michelson-Morley dont le résultat a trouvé une justification dans la théorie de la relativité d'Einstein.

(*) Dans le beau livre de Bromwich << Theory of infinite series >> (2^e éd., 1926), les S_N sont étudiées dans une section intitulée << Fejér's Lemma >>. Il y a une mention d'un article de Jackson de 1911, qui contient en fait la première preuve de l'inégalité (conjecturée par Fejér) $S_N(x) > 0$ pour $0 < x < \pi$. Turán prouve un résultat plus général en 1952 et donne une réécriture << magique >> de S_N en une intégrale d'une fonction positive. Vietoris (1891-2002) fait de remarquables contributions, dont une publication à l'âge respectable de 102 ans...voir << Special functions >> de Andrews, Askey et Roy (1999).

FIG. 5 - S_{60} sur $[0, \pi]$



$\cos(\frac{N+1}{2}x) \sin(\frac{N}{2}x)$. Les facteurs $\cos(\frac{N+1}{2}x)$ et $\sin(\frac{N}{2}x)$ sont des fonctions analytiques et leurs zéros dans $]0, \pi[$ sont simples : ce sont les $t_k = \frac{\pi}{N+1} + k \frac{2\pi}{N+1} = (2k+1) \frac{\pi}{N+1}$, $0 \leq k \leq N$, et les $u_j = j \frac{2\pi}{N} = 2j \frac{\pi}{N}$, $1 \leq j \leq N-1$. Lorsque l'on voudra indiquer la dépendance par rapport à N on écrira $t_k^{(N)}$ et $u_j^{(N)}$. On ne peut avoir $t_k = u_j$ que si $2j(N+1) = (2k+1)N$. Or N et $N+1$ sont premiers entre eux donc N divise $2j$. Cela n'est possible pour $1 \leq j \leq N-1$ que si $2j = N$ et alors $2k+1 = N+1$, donc $j = k = \frac{N}{2}$. Donc si $N = 2n+1$ est impair cela n'arrive pas : vous vérifierez que $0 < t_0 < u_1 < t_1 < u_2 < \dots < u_n < t_n < \pi < t_{n+1} < u_{n+1} < \dots < u_{N-1} < t_N < 2\pi$. Si $N = 2n$ on a à la place $0 < t_0 < u_1 < t_1 < \dots < t_{n-1} < u_n = t_n = \pi < t_{n+1} < u_{n+1} < \dots < u_{N-1} < t_N < 2\pi$. Dans ce cas $S'_N(x)$ a un zéro double en $x = \pi$ ce qui correspond à un point d'inflexion pour $S_N(x)$, qui traverse de manière tangente l'axe horizontal en $x = \pi$ (j'ai oublié de dire que $S_N(\pi) = 0$ pour tout N , évidemment). D'autre part $S'_N(0) = N$, donc $S'_N(x)$ est successivement positif, négatif, positif, négatif, etc... Donc S_N est d'abord strictement croissante, puis strictement décroissante, puis strictement croissante, etc... les $t_k < \pi$ sont des maxima locaux, les $u_j < \pi$ sont des minima locaux (sur l'intervalle $]\pi, 2\pi[$ c'est le contraire car $S_N(2\pi - x) = -S_N(x)$).

Supposons que $S_N(x) < 0$ soit possible sur $]0, \pi[$. Alors prenons x_0 tel que S_N y atteigne son minimum absolu (il peut y en avoir plusieurs, on en choisit un). Ce x_0 est un minimum local donc de la forme $u_j = 2j \frac{\pi}{N}$. Mais alors, miracle, $\sin(Nu_j) = 0$, donc $S_N(u_j) = S_{N-1}(u_j)$. Donc on peut obtenir une contradiction en faisant l'hypothèse de récurrence que ça marche pour S_{N-1} ! (pour $N = 1$, on a $S_1(x) = \sin(x)$; pour $N = 2$, on a $S_2(x) = \sin(x) + \sin(x) \cos(x) = \sin(x) 2 \cos^2(\frac{x}{2})$). Donc en tout cas $S_N(x) \geq 0$ pour $0 < x < \pi$. Si la valeur 0 est atteinte (une ou plusieurs fois), alors à nouveau c'est en un minimum local donc de la forme

u_j et donc encore une fois $S_N(u_j) = S_{N-1}(u_j) > 0$ par hypothèse de récurrence... contradiction. Conclusion : on a prouvé :

$$0 < x < \pi \Rightarrow 0 < S_N(x)$$

Venons-en à l'analyse du phénomène de Gibbs : le $(k+1)^{\text{ème}}$ maxima local est en t_k ($0 \leq 2k < N$), la valeur de S_N en ce point est :

$$S_N\left((2k+1)\frac{\pi}{N+1}\right) = \sum_{1 \leq j \leq N} \frac{\sin\left(j\frac{(2k+1)\pi}{N+1}\right)}{j} = \sum_{1 \leq j \leq N+1} \frac{(2k+1)\pi}{N+1} \psi\left(j\frac{(2k+1)\pi}{N+1}\right)$$

où l'on a machiavéliquement introduit la fonction $\psi(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ (le point supplémentaire $j = N+1$ ne change rien à la somme). Il s'agit donc exactement d'une somme de Riemann pour cette fonction, sur l'intervalle $[0, (2k+1)\pi]$. Donc :

$$\forall k \quad \lim S_N(t_k) = C_k = \int_0^{(2k+1)\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

En particulier le premier maximum de S_N tend (en croissant avec N d'ailleurs, car $t_0^{(N+1)} < t_0^{(N)} < u_1^{(N+1)}$, donc $S_{N+1}(t_0^{(N+1)}) > S_{N+1}(t_0^{(N)}) = S_N(t_0^{(N)})$), pour $N \rightarrow \infty$, vers

$$C_0 = \int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx \approx 1,8519$$

Les deuxièmes, troisièmes, etc..., maxima locaux de S_N tendent vers $C_1 = \int_0^{3\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx$, $C_2 = \int_0^{5\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx$, etc... On a $1,8519 \approx C_0 > C_1 > C_2 > \dots$ avec pour limite $\frac{\pi}{2}$.

De même les minima locaux successifs tendent, pour $N \rightarrow \infty$ vers les valeurs $D_j = \int_0^{2j\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx$ ($D_1 = \int_0^{2\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx \approx 1.4181$). Il est facile de voir que $D_1 < D_2 < D_3 < \dots$ avec pour limite $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2} \approx 1.5708$.

Il nous reste à montrer que S_N atteint en $t_0 = \frac{\pi}{N+1}$ non seulement un maximum local, mais même son maximum global.

Notons $M_k = S_N(t_k)$. Nous allons montrer que la suite M_k , $0 \leq k \leq \frac{N}{2}$, est (strictement) décroissante (on se limite donc aux $t_k \leq \pi$). On a :

$$M_k - M_{k+1} = - \int_{t_k}^{t_{k+1}} S'_N(x) dx$$

$$\begin{aligned} S'_N(x) &= \frac{D_N(x) - 1}{2} = \frac{1}{2} \frac{\sin\left((N+\frac{1}{2})x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin((N+1)x) \cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos((N+1)x) \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos((N+1)x) + \frac{1}{2} \sin((N+1)x) \cotg\left(\frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

d'où il résulte, puisque l'intervalle d'intégration est de longueur $\frac{2\pi}{N+1}$:

$$M_k - M_{k+1} = +\frac{\pi}{N+1} - \frac{1}{2} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sin((N+1)x) \cotg\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

On fait le changement de variable $x = t_k + \theta \frac{1}{N+1} = \frac{2k\pi + \pi + \theta}{N+1}$ de sorte que $\sin((N+1)x) = -\sin\theta$ et donc :

$$M_k - M_{k+1} = \frac{\pi}{N+1} + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin(\theta) \cotg\left(\frac{x(\theta)}{2}\right) \frac{d\theta}{N+1}$$

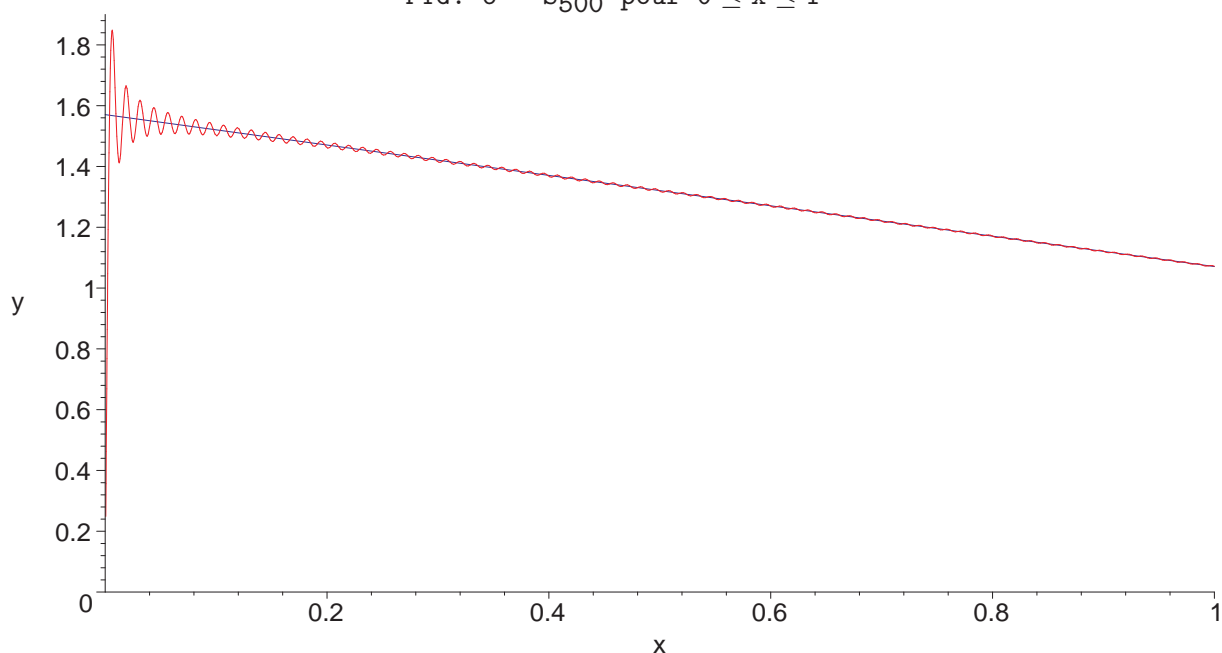
La fonction continue $\cotg\left(\frac{x}{2}\right)$ est strictement décroissante sur $]0, \pi]$. En écrivant l'intégrale sous la forme :

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi \sin(\theta) \left(\cotg\left(\frac{x(\theta)}{2}\right) - \cotg\left(\frac{x(\theta+\pi)}{2}\right) \right) \frac{d\theta}{N+1}$$

on voit alors que : $M_k - M_{k+1} > \frac{\pi}{N+1}$, pour $2(k+1) \leq N$. En particulier, le premier maximum en $x = t_0$ est bien le maximum absolu de la fonction S_N sur \mathbb{R} (qui est donc partout strictement inférieur à $\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x} dx$).

En ce qui concerne les minima, le graphe pour $N = 60$ montre qu'ils ne forment pas (sauf pour, disons, $N \lesssim 30$) une suite décroissante. Cependant ils forment une suite (finie) concave. Je me réserve la démonstration au cas où j'ai besoin de publier un dernier article mathématique avant ma mise à la retraite. De même les maxima forment en fait une suite convexe (tout cela se rapporte uniquement à l'intervalle $]0, \pi]$, tout est inversé dans $[\pi, 2\pi[$).

FIG. 6 - S_{500} pour $0 \leq x \leq 1$



Il n'est pas difficile de montrer que le phénomène de Gibbs vaut pour toute fonction F (raisonnable) avec un saut : après translation on peut supposer que la discontinuité est en 0 ; on soustrait de F un multiple adapté de la fonction que nous venons d'étudier en détail, pour éliminer le saut, et si le résultat est continu et C^1 par morceaux dans un voisinage de l'origine, la différence des séries de Fourier sera uniformément convergente sur un voisinage de 0, et donc cela permet de voir que les sommes partielles de la série de Fourier de F présentent aussi le phénomène de Gibbs. Détails laissés au lecteur.

À titre d'exemple, la série de Fourier correspondant au dernier graphe de cette feuille est $\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \frac{\sin(7x)}{7} + \dots$. Elle converge vers $\frac{\pi}{4}$ pour $0 < x < \pi$ et vers $-\frac{\pi}{4}$ pour $-\pi < x < 0$. La figure représente la somme partielle jusqu'au terme $\frac{\sin(33x)}{33}$ inclus. Ici encore on constate l'omniprésence du « phénomène ». [obsolète : à noter que visiblement le logiciel qui a produit le graphe montre ses limites, mais j'ai eu beau essayer d'ajuster le nombre de points, la précision, etc. . . , je n'ai pas réussi à obtenir quelque chose de plus réaliste.] [Post-Scriptum (avril 2007) : j'ai enfin compris que je devais utiliser la v8 et non pas la v9, totalement défectueuse pour les graphiques, du logiciel que j'avais utilisé pour tracer ces graphes.]

