Le théorème de Fréchet-Riesz

Je ne redonne pas ici la discussion du cours autour de la notion de projection orthogonale. Pour la dimension finie se reporter aux exercices de la feuille 4. Pour la dimension infinie on a besoin du point suivant :

Hyper-important (prouvez-le !) : Soit V un espace hermitien et $W \subset V$ un sous-espace vectoriel. On suppose que W est, pour le produit scalaire induit de V, un espace de Hilbert. Montrer que pour tout $v \in V$ il existe un unique vecteur $w \in W$ minimisant $\|v - w\|$, et que cela équivaut à $v - w \perp W$. Ind. : prendre une suite $(w_j)_{j\geq 1}$ avec $\|v - w_j\| \to \inf_{w\in W} \|v - w\|$ et utiliser

$$\|w_j - w_k\|^2 + 4\|\frac{w_j + w_k}{2} - v\|^2 = 2\|w_j - v\|^2 + 2\|w_k - v\|^2$$

pour affirmer avec force que (w_j) est de Cauchy, donc convergente dans W, vers une limite w qui est ce que l'on recherche.

Si V lui-même est supposé être un Hilbert alors le sous-espace vectoriel $W \subset V$ le sera si et seulement si il est fermé pour la topologie de V (prouvez-cela).

Lorsque vous avez une fonction continue sur un espace topologique, le lieu de ses zéros est un fermé. Donc si $L : V \to \mathbb{C}$ est une fonction continue sur un espace de Hilbert, à valeurs dans $\mathbb{C}$ (muni de sa topologie standard) l'ensemble $W = \{u \mid L(u) = 0\}$ est fermé. Si L est aussi une application linéaire $(L(\alpha u + \beta v) = \alpha L(u) + \beta L(v))$, alors on a la garantie que le fermé W est un sous-espace vectoriel de V. Lorsque l'on a une application linéaire L de V vers $\mathbb{C}$ on dit que l'on a une forme linéaire. Quelle est la condition pour qu'une forme linéaire soit continue ? Comme $L(u_0 + v) = L(u_0) + L(v)$ la continuité de L au point u_0 découle de la continuité de L au point 0. Pour cela il faut en particulier qu'il existe un $\delta > 0$ tel que $0 < \|v\| < \delta$ implique $|L(v)| \leq 1$. Prenons $v \neq 0$ quelconque, et soit $v' = \frac{1}{2}\delta\|v\|^{-1}v$ de sorte que $\|v'\| = \frac{1}{2}\delta$. On a $|L(v')| \leq 1$ donc $|L(v)| \leq \frac{2}{\delta}\|v\|$. Réciproquement si il existe $C < \infty$ tel que $\forall v\ |L(v)| \leq C\|v\|$ alors (clair ?) L est continue en 0, donc partout. Ce que nous venons d'expliquer vaut pour tout espace vectoriel normé : une forme linéaire L est continue si et seulement si elle est bornée, c'est-à-dire si il existe $C < \infty$ tel que $\forall v\ |L(v)| \leq C\|v\|$. On posera alors $\|L\| = \sup_{\|v\|=1} |L(v)|$, qui est le plus petit C qui puisse marcher. L'ensemble V^* des formes linéaires continues sur l'espace vectoriel normé V est un espace vectoriel, et (vérifiez !) il est lui-même un espace normé par la définition que nous venons d'adopter pour $\|L\|$. C'est le dual de V.

Le Théorème de Fréchet-Riesz détermine les formes linéaires continues sur un

Hilbert V. Prenons un $u \in V$ et définissons $L(v) = (v,u)$. C'est une forme linéaire. Elle est continue, car $|L(v)| = |(v,u)| \leq \|v\|\|u\|$, donc elle est bornée et l'on a $\|L\| \leq \|u\|$. En prenant $v = \|u\|^{-1}u$, on a $\|v\| = 1$ et $L(v) = \|u\|^{-1}(u,u) = \|u\|$, donc $\|L\| \geq \|u\|$. Ainsi $\|L\| = \|u\|$. En associant à u la forme linéaire L on a une application (isométrique) de V vers V^*. Petite contrariété, cette application n'est pas linéaire, elle est conjuguée-linéaire (vous comprenez ?). Le théorème de Fréchet-Riesz affirme que cette association est bijective. L'injectivité est claire (gare à vous sinon), reste à montrer la surjectivité.

Preuve : on se donne une L, forme linéaire continue sur V et il faut trouver le u (unique ; pourquoi ?) tel que $\forall v \in V\ L(v) = (v,u)$. Si $L \equiv 0$ on prend $u = 0$. Sinon on prend u_1 avec $L(u_1) = 1$ (why is this possible ?). Et par ailleurs on regarde le sous espace vectoriel fermé $W = \{v \in V \mid L(v) = 0\}$. On fait la projection orthogonale de u_1 sur W, cela donne un vecteur v_1. Soit $u_0 = u_1 - v_1$. On a toujours $L(u_0) = 1$. De plus nous savons que u_0 est perpendiculaire à W : $L(w) = 0 \Longrightarrow (w,u_0) = 0$. Maintenant prenons v quelconque et regardons le vecteur $w = v - L(v)u_0$. Calculons $L(w) = L(v) - L(v) = 0$. Donc $w \in W$ et donc $0 = (w,u_0) = (v,u_0) - L(v)(u_0,u_0)$. Certainement $(u_0,u_0) > 0$. Posons $u = \frac{u_0}{(u_0,u_0)}$. Alors ce u marche (ALLES KLAR ?).

Tout espace de Hilbert est donc canoniquement (anti-)isomorphe à son dual. Il est donc canoniquement isomorphe à son double-dual V^{**}.

D'une manière générale, pour tout espace vectoriel normé on a une application linéaire canonique de V vers son double dual V^{**}, car tout $v \in V$ définit une forme linéaire continue sur V^* par $L \mapsto L(v)$ (warum ?). Cette application de V vers son double-dual V^{**} est toujours injective, car si $v \in V$ est non nul, il existe une forme linéaire continue $L \in V^*$ telle que $L(v) \neq 0$. Ceci n'est pas du tout trivial, en fait c'est une partie d'un théorème de base en Analyse Fonctionnelle, le théorème de Hahn-Banach. Lorsque l'injection canonique $V \subset V^{**}$ est bijective, on dit que l'espace vectoriel normé V est réflexif. Les Hilbert sont donc réflexifs. Qu'ils soient en fait déjà (anti)-isomorphes (canoniquement) à leur dual V^* est très très spécial.

Dernière remarque : un espace vectoriel normé V se << complète >> en un Banach $V^\sim$ par la méthode introduite par Cantor pour constuire $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$, la méthode des suites de Cauchy. Comme $V \subset V^\sim$ on a $V^{\sim *} \subset V^*$: cette deuxième inclusion est en fait une égalité, prouvez-le.

Vraiment dernière remarque : pour tout espace vectoriel normé V son dual V^* est automatiquement complet ; c'est toujours un Banach. Prouvez-le.