Fejér presque partout

Kolmogorov a construit en 1926 une fonction f intégrable 2π-périodique dont la série de Fourier est partout divergente. Cela a fortement impressionné les esprits et pendant longtemps on n'a pas su quoi penser, sous des hypothèses plus fortes, comme la continuité de f. La réponse vint en 1966, lorsque Carleson prouva que pour toute f de carré intégrable (donc, en particulier, pour toute fonction continue), la série de Fourier est presque partout convergente (déjà au dix-neuvième siècle, Du Bois-Reymond avait donné un exemple de fonction continue telle que la série de Fourier diverge en au moins un point ; prouver la convergence partout était donc exclu d'emblée). Longtemps avant le résultat de Carleson, Lebesgue avait montré un résultat de convergence sous la seule hypothèse $f \in L^1(0, 2\pi; \frac{dx}{2\pi})$: pour presque tout x on a $\lim \Sigma_N(f)(x) = f(x)$. Je rappelle que $\Sigma_N(f)(x)$ est la $N^{\text{ième}}$ somme de Fejér. Donc pour l'exemple de Kolmogorov, la série de Fourier est partout divergente, mais sa moyenne de Cesàro est presque partout convergente.

Je vais prouver ici $\lim \Sigma_N(f)(x_0) = f(x_0)$ en tout point de Lebesgue de la fonction intégrable 2π-périodique f (et par l'annexe précédente presque tout point est un point de Lebesgue). Quitte à remplacer $f(x)$ par $f(x - x_0)$ on peut supposer $x_0 = 0$. Ensuite on a la formule :

$$\Sigma_N(f)(0) - f(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{f(t)+f(-t)}{2} - f(0)\right) F_N(t)\,dt$$

Donc, en posant $g(t) = \left|\frac{f(t)+f(-t)}{2} - f(0)\right|$ et en rappelant $F_N(t) \geq 0$ on a :

$$|\Sigma_N(f)(0) - f(0)| \leq \frac{1}{\pi}\int_0^\pi g(t)F_N(t)\,dt = J_N$$

Notre objectif est de prouver $\lim J_N = 0$. Notre hypothèse est que 0 est un point de Lebesgue de f, et donc, en posant

$$G(u) = \frac{1}{u}\int_0^u g(t)\,dt$$

on a $G(0^+) = 0$. Sur $]0, \pi]$ G est continue et on posera $\sup_{0<u\leq\pi} G(u) = M < \infty$.

L'idée cruciale est de majorer $F_N(t) = \frac{1}{N}\frac{\sin^2(\frac{Nt}{2})}{\sin^2(\frac{t}{2})}$ par un noyau $K_N(t)$ décroissant sur $[0, \pi]$. Je propose $K_N(t) = N$ pour $0 \leq t \leq \frac{\pi}{N}$ et $K_N(t) = \frac{1}{N}\frac{\pi^2}{t^2}$ pour $\frac{\pi}{N} \leq t \leq \pi$. Vous vérifierez que $0 \leq F_N(t) \leq K_N(t)$, et que K_N est continue et décroissante. Pour future référence, je signale $\int_0^\pi K_N(t)\,dt \leq 2\pi$ comme il résulte d'un calcul très simple. En posant $k_N(t) = 0$ pour $0 \leq t < \frac{\pi}{N}$ et $k_N(t) = \frac{2}{N}\frac{\pi^2}{t^3}$ pour $\frac{\pi}{N} \leq t \leq \pi$ on a $K_N(t) = \int_t^\pi k_N(u)\,du + \frac{1}{N}$. Le point important c'est que $k_N \geq 0$.

Par Fubini, on a :

$$
\begin{aligned}
J_N \leq \frac{1}{\pi}\int_0^\pi g(t)K_N(t)\,dt &= \frac{1}{\pi N}\int_0^\pi g(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\iint_{0\leq t\leq u\leq\pi} g(t)k_N(u)\,dtdu \\
&= \frac{1}{\pi N}\int_0^\pi g(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi uG(u)\,k_N(u)\,du
\end{aligned}
$$

Il s'agit donc de montrer $\lim \int_0^\pi uG(u)\,k_N(u)\,du = 0$. On remarque en prenant $g \equiv 1$, $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi K_N(t)\,dt = \frac{1}{N} + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi u\,k_N(u)\,du$, donc $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi u\,k_N(u)\,du \leq 2$. On fait la découpe habituelle, pour chaque $\delta \in]0,\pi[$ (et en rappelant $M = \sup_{0<u\leq\pi} G(u)$) :

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_0^\pi uG(u)\,k_N(u)\,du &= \frac{1}{\pi}\int_0^\delta uG(u)\,k_N(u)\,du + \frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi uG(u)\,k_N(u)\,du \\
&\leq 2\sup_{0<u\leq\delta} G(u) + M\,\frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi u\,k_N(u)\,du
\end{aligned}
$$

Pour $N \geq \frac{\pi}{\delta}$ on a $k_N(u) = \frac{2}{N}\frac{\pi^2}{u^3}$ sur $[\delta,\pi]$ et donc $\int_\delta^\pi u\,k_N(u)\,du \leq \frac{2}{N}\frac{\pi^2}{\delta}$. On peut donc écrire pour chaque $\delta > 0$:

$$
\limsup \frac{1}{\pi}\int_0^\pi uG(u)\,k_N(u)\,du \leq 2\sup_{0<u\leq\delta} G(u)
$$

Comme $\lim_{u \to 0^+} G(u) = 0$, on en déduit alors en faisant tendre δ vers 0 :

$$
\limsup \frac{1}{\pi}\int_0^\pi uG(u)\,k_N(u)\,du = 0
$$