Les espaces L^1 et L^2 sont complets

Mode << télé-enseignement >> (no comments). v1 : 17 mars ; rev. 4 avril.

L'espace vectoriel $L^1(0,2\pi;\frac{dx}{2\pi})$ est l'espace des fonctions mesurables intégrables sur l'intervalle $[0,2\pi]$, à l'équivalence pour l'égalité presque partout près. On peut aussi voir ces (classes de) fonctions comme des fonctions périodiques (imposer $f(2\pi) = f(0)$ est possible puisque les singletons sont de mesure nulle). On peut avoir besoin de l'espace $\mathcal{L}^1(0,2\pi;\frac{dx}{2\pi})$ des fonctions mesurables intégrables, encore que là il faudrait être plus précis dans la notation : $\mathcal{L}^1([0,2\pi];\frac{dx}{2\pi})$, ou $\mathcal{L}^1([0,2\pi[;\frac{dx}{2\pi})$ ou encore $\mathcal{L}^1(]0,2\pi[;\frac{dx}{2\pi})$ ou encore l'espace $\mathcal{L}^{1,per}$ des fonctions 2π-périodiques mesurables, intégrables sur une période, ce sont à chaque fois des choses un peu différentes. Mais bon en général on travaille avec l'espace $L^1(0,2\pi;\frac{dx}{2\pi})$ des classes d'équivalence car on veut pouvoir dire $\|f\|_1 = 0 \Longrightarrow f = 0$. Allez, je suis totalement honnête, on travaille dans cet espace de classes d'équivalence, mais un symbole comme f en général fait référence à une fonction, pas à une classe d'équivalence. Et on rajoute des p.p. (<< presque partout >>) à toutes les égalités, ou inégalités. Sauf que parfois on oublie ; ou alors on décide soudainement sans prévenir que ça y est, le f c'est plus une fonction, c'est une classe d'équivalence. Voilà ma politique en fait : je veux pouvoir dire << ce qui prouve $f_1(x) = f_2(x)$ p.p. donc $f_1 = f_2$ dans L^1. >> En effet j'ai énormément de mal à me dire que cos(x) par exemple, c'est plusieurs choses différentes suivant que je le vois dans L^1 ou dans L^2, ou dans $\mathcal{C}^{\infty,per}$. Je préfère voir cos(x) comme une chose qui a plusieurs aspects. Donc je veux pouvoir dire $\cos \in L^1$ et aussi $\cos \in L^2$ (et aussi $\cos \in C^{\infty,per}$). Dans le même temps je ne veux pas non plus considérer L^2 comme réellement un sous-ensemble de L^1, j'ai toujours en tête plutôt la flèche injective (grâce à Cauchy-Schwarz) $L^2 \hookrightarrow L^1$. Donc il y a L^2 d'un côté, L^1 de l'autre, et le premier s'injecte dans le second mais je ne veux pas vraiment le voir comme un sous-ensemble du second. Bref, il y a un petit aspect artistique dans tout cela qui en fait tout son charme.

J'ai déjà mentionné $L^2(0,2\pi;\frac{dx}{2\pi})$. Je rappelle que (c'est lié à Cauchy-Schwarz) on a la norme $\|\cdot\|_2$. En posant $d(f,g) = \|f-g\|_2$ on définit une notion de distance sur l'espace vectoriel L^2, qui devient un espace métrique (on dit que l'on a un espace vectoriel normé). De même L^1 est un espace métrique. Dans tout espace métrique on a la notion de suite de Cauchy, et si toute suite de Cauchy converge on dit que l'espace métrique est complet. Vous savez tout cela.

Théorème : *les espaces vectoriels normés $L^1(0,2\pi;\frac{dx}{2\pi})$ et $L^2(0,2\pi;\frac{dx}{2\pi})$ sont complets en tant qu'espaces métriques.*

Un espace vectoriel normé complet est appelé << espace de Banach >>. Souvent on dit que le théorème précédent (ou le suivant) est le << Théorème de Riesz-Fischer >>. À cette époque ils ne disposaient pas de notre vocabulaire (la thèse de Banach c'est vers 1920.) Dans le cas de L^2 la norme est associée à une forme sesquilinéaire (f,g) et on parle alors d'<< espace de Hilbert >>.(*)

Théorème : *$L^2(0,2\pi;\frac{dx}{2\pi})$ est un Hilbert et $L^1(0,2\pi;\frac{dx}{2\pi})$ est un Banach.*

Il y a peu de théorèmes aussi importants en Mathématiques. Dans la suite du semestre nous allons étudier plusieurs notions liées aux espaces de Hilbert.

Théorème : *l'espace petit $l^2(\mathbb{Z})$ est un espace de Hilbert.*

En fait par l'identité de Parseval (Fatou, est-ce dans sa thèse de 1906 ou plus tard, à vérifier) et le théorème de Riesz-Fischer de 1907, il y a une bijection entre $L^2(0,2\pi;\frac{dx}{2\pi})$ et $l^2(\mathbb{Z})$ compatible aux normes. Pour prouver que $L^2(0,2\pi;\frac{dx}{2\pi})$ est complet on pourrait se contenter de prouver que $l^2(\mathbb{Z})$ est complet, ce qui est plus facile, car n'utilisant pas les théorèmes de l'intégrale de Lebesgue. Mais comme je veux aussi prouver que L^1 est complet, je ne prends pas ce raccourci. Comme je vois que la page s'amenuise dangereusement FAITES L^2 VOUS-MÊMES ! (cf. technique de l'annexe Riesz-Fischer).

Preuve que $L^1(0,2\pi;\frac{dx}{2\pi})$ est complet : je considère une suite de Cauchy (f_n), $n=1,2\ldots$. Je rappelle que cela veut dire $\lim_{N\to\infty}\sup_{n,m\geq N}\|f_n-f_m\|_1=0$. Il y a un exercice classique dans les espaces métriques qui demande de montrer que si une suite de Cauchy a une suite extraite convergente elle est elle-même convergente. Donc on va juste se contenter de construire une suite extraite convergente. D'abord on prend $N_1<N_2<N_3<\ldots$ tels que $\sup_{n,m\geq N_k}\|f_n-f_m\|_1\leq\frac{1}{2^k}$. On pose(**) alors $g_0(x)=f_{N_1}(x)$, $g_1(x)=f_{N_2}(x)-f_{N_1}(x)$, etc..., $g_k(x)=f_{N_{k+1}}(x)-f_{N_k}(x)$. On a donc

$$f_{N_{K+1}}(x)=g_0(x)+g_1(x)+\cdots+g_K(x)$$

Définissons aussi $G_K(x)=|g_0(x)|+|g_1(x)|+\cdots+|g_K(x)|$ et même $G(x)=\sum_{k=0}^{\infty}|g_k(x)|$. Par le théorème de la convergence monotone $\int_0^{2\pi}G(x)\,\frac{dx}{2\pi}\leq\|g_0\|_1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots<+\infty$. Du coup le lieu des x avec $G(x)=+\infty$ est de mesure nulle. Pour ceux là posons $F(x)=0$. Pour les autres la série $\sum_{k=0}^{\infty}g_k(x)$ est absolument convergente et on pose $F(x)=\sum_{k=0}^{\infty}g_k(x)$. On a donc pour tous les x, $|F(x)|\leq G(x)$ donc $F\in L^1$. De plus pour presque tout x on a $F(x)=f_{N_{K+1}}(x)+\sum_{j=K+1}^{\infty}g_j(x)$ donc presque partout(***) :

$$|F(x)-f_{N_{K+1}}(x)|\leq\sum_{j=K+1}^{\infty}|g_j(x)|$$

et donc (convergence monotone) $\|F-f_{N_{K+1}}\|_1\leq\frac{1}{2^K}$. C'est fini. Ok ?

(*) l'article fondateur de Hilbert date de 1906 ; mais, bizarrement, ce n'est qu'en 1929 que la notion d'<< espace de Hilbert >> est présentée axiomatiquement par von Neumann. Les travaux de Riesz, Weyl, Carleman sur la théorie spectrale des opérateurs dans les Hilbert concernaient des contextes plus concrets d'opérateurs intégraux et d'espaces de fonctions.

(**) petite subtilité : on a imposé à chaque f_n d'être partout finie. Pourquoi ?

(***) en fait partout, pourquoi ?