Les Théorèmes de Cantor-Lebesgue et Denjoy-Lusin

Si $\lim a_n = \lim b_n = 0$ alors évidemment on a $a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx) \to 0$ pour tout x. La réciproque vaut-elle ? oui, et ce théorème est dû à Cantor (on ne suppose pas que les a_n et b_n soient des coefficients de Fourier d'une fonction). Mieux encore il suffit d'après Lebesgue de supposer $\lim\ a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx) = 0$ pour les x d'un ensemble de mesure non-nulle. Par ailleurs si $\sum_{n\geq 1} |a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)| < \infty$ sur un ensemble de mesure > 0 alors $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n| < \infty$. C'est le théorème de Denjoy-Lusin.

Cantor-Lebesgue

On suppose $a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx) \to 0$ pour tout x. En prenant x = 0 on a immédiatement $a_n \to 0$. Compte tenu de cela on peut supposer $\forall x\ b_n\sin(nx) \to 0$. Pour la démonstration de $b_n \to 0$, raisonnons par l'absurde. Si l'on n'a pas $b_n \to 0$ c'est qu'il existe $\epsilon > 0$ et une suite extraite $c_k = b_{n_k}$ avec $|c_k| \geq \epsilon$ pour tout k. Pour des raisons qui vont devenir claires dans une seconde, on peut quitte à passer encore à une suite extraite $d_l = c_{k_l} = b_{n_{k_l}} = b_{m_l}$, supposer $m_{l+1} \geq 3m_l$. En effet il suffit de définir k_{l+1} (et donc $m_{l+1} = n_{k_{l+1}}$) par récurrence comme étant le premier $k > k_l$ tel que $n_k \geq 3n_{k_l}$.

Cela dit supposons construits des intervalles fermés emboîtés $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_l$ dans $[0,\pi]$ tels que I_j pour $1 \leq j \leq l$ soit de longueur $\frac{2\pi}{3m_j}$ et avec $|\sin(m_j x)| \geq \frac{1}{2}$ sur I_j (je vous laisse la définition du premier d'entre eux). Dans l'intervalle I_l il y a au moins deux points consécutifs en lesquels $|\sin(m_{l+1}x)|$ s'annule : en effet si il y en avait au plus un, I_l serait de longueur strictement inférieure à $2\frac{\pi}{m_{l+1}}$. Mais on a $m_{l+1} \geq 3m_l$ par construction et la longueur de I_l est exactement $\frac{2\pi}{3m_l}$. Contradiction. Donc la fonction $|\sin(m_{l+1}x)|$ a dans I_l un intervalle entier allant d'un zéro au suivant. On définit I_{l+1} comme étant le sous-intervalle fermé de cet intervalle sur lequel $|\sin(m_{l+1}x)| \geq \frac{1}{2}$. Il est de longueur $\frac{2\pi}{3m_{l+1}}$. Le principe d'induction donne ainsi les I_l pour tout $l \geq 1$.

Les extrémités des I_l forment une paire de deux suites adjacentes, donc l'intersection de tous les I_l est non vide, et en fait égale au singleton $\{x_0\}$ avec x_0 la limite commune de ces deux suites. On peut enfin conclure : comme $\forall l\ |\sin(m_l x_0)| \geq \frac{1}{2}$, de $b_{m_l}\sin(m_l x_0) \to 0$ on déduit $b_{m_l} \to 0$. Or par construction on a $|b_{m_l}| \geq \epsilon$ pour tout l ce qui apporte la contradiction finale.

Remarquons qu'il y a en particulier dans cette preuve le principe intéressant suivant : pour montrer qu'une suite converge vers L il suffit de montrer que toute suite-extraite a une sous-suite extraite qui converge vers L. Lorsque l'on lit ce genre de choses, on n'est pas trop surpris d'apprendre que Cantor a eu de graves problèmes d'équilibre psychique par la suite...

La démonstration ci-dessus est d'une nature topologique (intervalles, compacité). De plus elle utilise la continuité de la fonction sinus, ce qui en fait n'est nullement nécessaire pour garantir la conclusion, comme nous allons le voir maintenant grâce aux outils et concepts de la mesure des ensembles. En effet je vais démontrer l'extension due à Lebesgue du théorème de Cantor : *si l'ensemble des* $x \in [0, 2\pi]$ *avec* $a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \dashrightarrow 0$ *est de mesure* > 0 *alors c'est que* $\lim a_n = \lim b_n = 0$.

On ne peut plus faire la première réduction, mais écrivons $a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \delta_n \sin(n(x - x_n))$ avec $\delta_n^2 = a_n^2 + b_n^2$. Soit $\epsilon > 0$ et considérons l'ensemble $X_N(\epsilon)$ des $x \in [0, 2\pi]$ tels que $|\delta_n \sin(n(x - x_n))| \leq \epsilon$ pour tout $n \geq N$. D'une part $X_1(\epsilon) \subset X_2(\epsilon) \subset \ldots$ et d'autre part $\bigcup X_N(\epsilon)$ contient l'ensemble des x tels que $a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \dashrightarrow 0$. Il existe donc en tout cas l'un des X_N qui soit de mesure > 0. On a $\forall n \geq N$ $\int_{X_N} |\delta_n \sin(n(x - x_n))| dx \leq \epsilon |X_N(\epsilon)|$. De plus on a certainement $\int_{X_N} |\sin(n(x - x_n))| dx \geq \int_{X_N} \sin^2(n(x - x_n)) dx = \frac{1}{2}|X_N| - \frac{1}{2}\int_{[0,2\pi]} (\cos(2nx_n)\cos(2nx) + \sin(2nx_n)\sin(2nx)) \mathbb{1}_{X_N}(x) dx$. Par le Théorème de Riemann-Lebesgue la deuxième intégrale tend vers 0 pour $n \dashrightarrow \infty$. Compte tenu de $|X_N(\epsilon)| > 0$ on en déduit que pour $n \gg 1$ on a $\int_{X_N} |\sin(n(x - x_n))| dx \geq \frac{1}{4}|X_N|$ et donc $|\delta_n| \leq 4\epsilon$. Ainsi $\lim\ \delta_n = 0$, d'où $\lim\ a_n = 0$ et $\lim\ b_n = 0$.

Je trouve cette preuve plus simple que la précédente (en principe comme en exécution), et de plus sous une hypothèse bien plus faible on a obtenu la même conclusion. Je signale que le théorème vaut avec n'importe quelle fonction positive g bornée (périodique, non presque partout nulle) : si $\lim b_n g(nx) = 0$ sur un ensemble de mesure > 0 alors $\lim\ b_n = 0$. La preuve donnée ici marche presque telle quelle, mais il faut raisonner autrement au niveau de l'astuce où l'on est passé de $|\sin|$ à $\sin^2$.

Le Théorème de Denjoy-Lusin

Théorème : *si l'ensemble des* $x \in [0, 2\pi]$ *tels que* $\sum_{n \geq 1}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ *est absolument convergente a une mesure non nulle alors* $\sum_{n \geq 1} |a_n| + |b_n| < \infty$.

Preuve : on écrit encore $a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \delta_n \sin(n(x - x_n))$. Pour $N \gg 1$ l'ensemble (dont je vous laisse le soin d'établir la mesurabilité) $X_N = \{x \in [0, 2\pi] \mid \sum_{n \geq N} |\delta_n \sin(n(x - x_n))| \leq 1\}$ sera de mesure > 0 (même technique). Par le théorème de la convergence monotone : $|X_N| \geq \int_{X_N} \sum_{n \geq N} |\delta_n \sin(n(x - x_n))| dx = \sum_{n \geq N} |\delta_n| \int_{X_N} |\sin(n(x - x_n))| dx$. Or (même technique), pour $n \gg 1$ on a $\int_{X_N} |\sin(n(x - x_n))| dx \geq \frac{1}{4}|X_N|$. La série $\sum |\delta_n|$ est ainsi convergente ce qu'il fallait prouver.

Remarque : ici encore, pour toute fonction $g \geq 0$, π-périodique, telle que $0 < \int_0^\pi g(x) dx < \infty$, si $\sum_{n=1}^\infty |b_n\ g(nx)| < \infty$ sur un ensemble de mesure > 0 alors $\sum |b_n| < \infty$ (et ceci implique $\sum_{n=1}^\infty |b_n\ g(nx)| < \infty$ pour presque tout x et même tout x si g est bornée).