Continuité absolue et Radon-Nikodym

Dans l'annexe précédente nous avons caractérisé les fonctions $F(x) = C + \int_{[a,x[} d\mu(t)$ associées aux mesures complexes sur $[a,b[$ comme étant les fonctions continues à gauche et de variation bornée (<< VB >> ou << BV >>) sur $[a,b[$. Parmi les mesures complexes il y a les mesures à densité $d\mu(t) = g(t)\,dt$ avec $g \in L^1(a,b;dt)$. Les fonctions $F(x) = C + \int_a^x g(t)\,dt$ sont continues (pourquoi ?). Elles ont en fait une propriété plus forte, dite de continuité absolue (<< AC >>), qui les caractérise, c'est l'objet de cette feuille.

Si vous vous reportez à l'annexe sur la convergence dominée, vous y verrez que nous avons prouvé : $\forall\epsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ |A| \le \delta \Longrightarrow \int_A |g(t)|\,dt \le \epsilon$. En particulier si $a \le a_1 < b_1 \le a_2 < b_2 \le \cdots \le a_N < b_N \le b$ en considérant $A = \bigcup_j]a_j, b_j[$ on obtient :

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall\ a \le a_1 < b_1 \le a_2 < b_2 \le \cdots \le a_N < b_N \le b,$$
$$\sum_j |b_j - a_j| \le \delta \quad\Longrightarrow\quad \sum_j |F(b_j) - F(a_j)| \le \epsilon$$

Cette condition nécessaire sur F s'appelle la continuité absolue. Le résultat difficile que nous prouverons ici c'est que cette condition est aussi suffisante pour pouvoir écrire F sous la forme $C + \int_a^x g(t)\,dt$ pour une certaine $g \in L^1(a,b;dt)$. Je rappelle que nous savons qu'alors F est p.p. dérivable avec $F' = g$. Donc, une fonction absolument continue s'écrit $F(x) = C + \int_a^x F'(t)\,dt$ en sachant que F' n'est définie que presque partout.(*)

Je commence bien sûr par montrer que F est VB. Prenons un $N \gg 1$ tel que $\delta = \frac{b-a}{N}$ marche pour $\epsilon = 1$. Soit (x_j) une subdivision quelconque, on ne peut qu'augmenter $V((x_j);F)$ en incluant les points équidistants $a + k\frac{b-a}{N}$, $0 \le k \le N$. La variation de cette subdivision élargie est la somme de N sous-sommes, chacune étant majorée par $\epsilon = 1$, donc en fait $V((x_j);F) \le N$ pour toute subdivision et donc $V([a,b];F) \le N$. Donc F est de variation bornée et il lui est associé une mesure complexe μ. Il s'agit de prouver que μ est une mesure à densité.

Soit A de mesure de Lebesgue nulle. On peut donc, pour tout $\delta > 0$ (en particulier pour un δ correspondant à un $\epsilon > 0$ dans la propriété AC de F), compte tenu de la construction usuelle de la mesure de Lebesgue, recouvrir A par une union dénombrable d'intervalles ouverts I_n, $n \ge 1$, dont la somme des longueurs est au plus δ. Soit $J_N = I_1 \cup \cdots \cup I_N$ et $A_N = A \cap J_N$. On a $|\mu|(A_N) \le |\mu|(J_N)$. On peut réécrire

(*) il y a un théorème en fait d'un esprit assez différent qui dit que si f est une fonction partout dérivable, et si f' est Lebesgue intégrable, alors $f(x) = C + \int_a^x f'(t)\,dt$, autrement dit, sous ces hypothèses, f est AC.

J_N comme une union finie d'intervalles ouverts disjoints $]a_k, b_k[$, $1 \le k \le M$ (si $b_k = b$ comprendre $,b]$ au lieu de $,b_k[$ et idem pour a). Donc $|\mu|(J_N) = \sum_k |\mu|(]a_k, b_k[) = \sum_k V(]a_k, b_k[; F)$. Comme $\sum_k |b_k - a_k| = |J_N| \le \sum_{1\le n\le N} |I_n| \le \delta$, si l'on prend des subdivisions quelconques des M intervalles $]a_k, b_k[$ et que l'on applique aux variations associées la propriété AC de F pour ce ϵ et δ on obtient au total $\sum_k V(]a_k, b_k[; F) \le \epsilon$ et donc $|\mu|(J_N) \le \epsilon$. A fortiori $|\mu|(A_N) \le \epsilon$ et par union dénombrable $|\mu|(A) \le \epsilon$. Finalement comme $\epsilon > 0$ est arbitraire on a donc $|\mu|(A) = 0$. Donc tout ensemble Lebesgue-négligeable est $|\mu|$-négligeable. Il se trouve que cela caractérise les mesures à densité :

Radon-Nikodym

Théorème : *Soit (X, ν) un espace mesuré avec ν positive finie, et μ une mesure complexe telle que tout ν-négligeable est μ-négligeable (μ est dite ν-absolument continue). Alors $d\mu(x) = g(x)d\nu(x)$ pour un certain $g \in L^1(X; \nu)$, qui est dit être la << dérivée de Radon-Nikodym >> de μ par rapport à ν.*

Soit $\lambda = |\mu| + \nu$ et considérons l'espace de Hilbert $L^2(X; \lambda)$. Alors $f \mapsto \int_X f(x)d|\mu|(x)$ est une forme linéaire continue, donc de la forme $\int_X f(x)G(x)d\lambda(x)$. On a $\int_A G(x)d\lambda(x) = |\mu|(A) \ge 0$ pour toute partie mesurable donc $G \ge 0$ λ-p.p., et on peut changer G pour vérifier partout $G \ge 0$. De même $\int_A G(x)d\lambda(x) \le \int_A d\lambda(x)$, donc $G \le 1$ p.p. et on peut imposer $G \le 1$ partout. Enfin soit $A = \{G = 1\}$. Alors $|\mu|(A) = \lambda(A)$ donc $\nu(A) = 0$. Donc, et c'est l'unique endroit où l'on utilisera l'hypothèse, A est aussi $|\mu|$-négligeable, donc A est λ-négligeable, donc au total on peut supposer $0 \le G < 1$ partout.

Soit f une fonction mesurable bornée, on a, pour tout A mesurable :

$$\int_A f(x)d|\mu|(x) = \int_A f(x)G(x)(d|\mu|(x) + d\nu(x))$$

On applique cela aussi à fG, fG^2, fG^3, etc..., fG^{N-1}, et l'on fait la somme télescopique ce qui donne :

$$\int_A f(x)(1 - G(x)^N)d|\mu|(x) = \int_A f(x)(G(x) + \cdots + G(x)^N)d\nu(x)$$

Supposons $f \ge 0$. À gauche on applique la convergence dominée et à droite on applique la convergence monotone. Il vient, avec $g_0(x) = \frac{G(x)}{1-G(x)}$:

$$\int_A f(x)d|\mu|(x) = \int_A f(x)g_0(x)\,d\nu(x)$$

En prenant $A = X$, $f \equiv 1$ on obtient $g_0 \in L^1(X; \nu)$. Puis via $f = \max(f, 0) - \max(-f, 0)$ on étend à toute f réelle bornée, puis évidemment à toute f mesurable complexe bornée. Nous savons qu'il existe h de module 1 avec $\mu(A) = \int_A h(x)d|\mu|(x)$ pour tout A. Donc $\mu(A) = \int_A g(x)d\nu(x)$ avec $g(x) = h(x)g_0(x) \in L^1(X; \nu)$ puisque $|h| = 1$.

Il ne serait pas difficile d'obtenir la décomposition plus générale $\mu = g\nu + \mu_S$ de toute mesure complexe en une partie ν-abs.cont. et une partie << ν-singulière >> ; voir un livre compétent (théorème de Lebesgue-Radon-Nikodym).