Université Lille 1 — UFR de Mathématiques
Licence de Mathématiques (S5, année 2005–2006)
L305 : ANALYSE COMPLEXE

CORRIGÉ de l'examen du 9 novembre 2005

Responsable : Jean-François Burnol

1 Exercice

1.1 On considère la série entière :

$$F(w) = 2w + \frac{2}{3}w^3 + \frac{2}{5}w^5 + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2\, w^{2j+1}}{2j+1}$$

Déterminer le rayon de convergence de cette série.

corr.: Pour $|w| > 1$ on a $\lim_{j\to\infty} \frac{2\,|w|^{2j+1}}{2j+1} = \infty$ donc le rayon de convergence est au plus 1. Pour $|w| < 1$ on a $\lim_{j\to\infty} \frac{2\,|w|^{2j+1}}{2j+1} = 0$ donc le rayon de convergence est au moins 1. Le rayon de convergence est 1.

1.2 On suppose $|w| < 1$. Prouver : $F(w) = \mathrm{Log}(1+w) - \mathrm{Log}(1-w)$.

corr.: On sait que $|w| < 1 \implies \mathrm{Log}(1+w) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{w^k}{k}$. Donc $-\mathrm{Log}(1-w) = +\sum_{k=1}^{\infty} \frac{w^k}{k}$. Dans la somme les exposants k pairs donnent des contributions opposées. Il ne reste que les exposants impairs $k = 2j+1$, $j \in \mathbf{N}$. Et on trouve bien $\mathrm{Log}(1+w) - \mathrm{Log}(1-w) = 2\sum_{j=0}^{\infty} \frac{w^{2j+1}}{2j+1}$.

1.3 On suppose $|w| < 1$ et $\mathrm{Im}(w) \geq 0$. Prouver $0 \leq \mathrm{Arg}(1+w) < \frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2} < \mathrm{Arg}(1-w) \leq 0$. Quelles sont les inégalités lorsque $\mathrm{Im}(w) \leq 0$? Montrer :

$$|w| < 1 \quad \implies \quad |\,\mathrm{Arg}(1+w) - \mathrm{Arg}(1-w)| < \pi$$

corr.: Le nombre complexe $w' = 1 + w$ vérifie, lorsque $|w| < 1$ et $\mathrm{Im}(w) \geq 0$: $\mathrm{Im}(w') \geq 0$ et $\mathrm{Re}(w') > 0$. Sa coordonnée polaire angulaire est donc comprise entre zéro et $\frac{\pi}{2}$. Donc $0 \leq \mathrm{Arg}(1+w) < \frac{\pi}{2}$. Par contre $w'' = 1 - w$ est lui situé dans le quadrant $\mathrm{Im}(w'') \leq 0$ et $\mathrm{Re}(w'') > 0$ et a donc une coordonnée polaire angulaire dans $]-\frac{\pi}{2}, 0]$. Lorsque $\mathrm{Im}(w) \leq 0$ les inégalités sont par le même argument $0 \leq \mathrm{Arg}(1-w) < \frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2} < \mathrm{Arg}(1+w) \leq 0$.

Si $\mathrm{Im}(w) \geq 0$ on obtient $0 \leq \mathrm{Arg}(1+w) - \mathrm{Arg}(1-w) < \pi$, et si $\mathrm{Im}(w) \leq 0$ on obtient $0 \leq \mathrm{Arg}(1-w) - \mathrm{Arg}(1+w) < \pi$. Dans tous les cas $|\mathrm{Arg}(1+w) - \mathrm{Arg}(1-w)| < \pi$.

1.4 On suppose $|w| < 1$. Justifier : $F(w) = \mathrm{Log}(\dfrac{1+w}{1-w})$.

corr.: On a $\exp(F(w)) = \exp(\mathrm{Log}(1+w))\exp(-\mathrm{Log}(1-w)) = (1+w)(1-w)^{-1}$. Et la partie imaginaire de $F(w)$ est $\mathrm{Arg}(1+w) - \mathrm{Arg}(1-w)$ donc par la question précédente dans $]-\pi, +\pi[$. Par définition de Log cela veut effectivement dire que $F(w) = \mathrm{Log}(\frac{1+w}{1-w})$.

1.5 On suppose $|w| < 1$ et on pose $z = \frac{1+w}{1-w}$. Montrer $|z-1| < |z+1|$. En déduire $\mathrm{Re}(z) > 0$.

corr.: On a $z - 1 = \frac{2w}{1-w}$ et $z + 1 = \frac{2}{1-w}$ donc $|z-1| = |w||z+1|$. L'éventualité $z+1 = 0$ est exclue car elle donnerait $0 = \frac{2}{1-w}$, donc $0 = 2$. Donc $z+1$ est non nul et $|w| < 1 \implies |z-1| = |w||z+1| < |z+1|$. Dans le plan complexe les points équidistants de -1 et de $+1$ sont ceux de la médiatrice du segment $[-1, +1]$, c'est-à-dire l'axe imaginaire. Les points plus proches de 1 que de -1 sont ceux du demi-plan à droite de la médiatrice, c'est-à-dire $\mathrm{Re}(z) > 0$.

1.6 Réciproquement montrer que pour tout z avec $\mathrm{Re}(z) > 0$ il existe un unique w tel que $z = \frac{1+w}{1-w}$. Exprimer w en fonction de z et prouver $|w| < 1$.

corr.: L'égalité, pour z fixé, $z = \frac{1+w}{1-w}$ équivaut à $z - zw = 1 + w$ (car $w = 1$ est impossible si $z - zw = 1 + w$), qui équivaut à $z - 1 = (z+1)w$, qui équivaut lorsque $z \neq -1$ à $w = \frac{z-1}{z+1}$. Donc effectivement lorsque $z \neq -1$, il existe un unique w et il est donné par la formule $w = \frac{z-1}{z+1}$. Lorsque $\mathrm{Re}(z) > 0$ on a expliqué dans la réponse précédente que $|z-1| < |z+1|$ donc effectivement $|w| < 1$.

1.7 En déduire : $\quad \mathrm{Re}(z) > 0 \implies \quad \mathrm{Log}\, z = 2\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2j+1}(\frac{z-1}{z+1})^{2j+1}$.

corr.: Par la question précédente en posant $w = \frac{z-1}{z+1}$, on a $|w| < 1$ et $z = \frac{1+w}{1-w}$. Donc $\mathrm{Log}(z) = F(w)$ et il suffit de remplacer dans la définition de $F(w)$ le nombre complexe w par $\frac{z-1}{z+1}$ d'où la formule demandée.

1.8 En déduire : $2\,(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{81}) < \mathrm{Log}\, 2 < 2\,(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{72})$.

corr.: Pour $z = 2$ on a $w = \frac{1}{3}$. La série est à termes positifs. On peut minorer (strictement) sa somme par les deux premiers termes ce qui donne $2\frac{1}{3} + 2\frac{1}{3}(\frac{1}{3})^3 = 2\,(\frac{1}{3} + \frac{1}{81})$. Pour la majoration, qui sera stricte, on remplace $\frac{2}{2j+1}(\frac{1}{3})^{2j+1}$ pour $j \geq 1$ par $\frac{2}{3}(\frac{1}{3})^{2j+1} = 2\frac{1}{9}(\frac{1}{9})^j$. La somme infinie $\sum_{j\geq 1} \frac{2}{2j+1}(\frac{1}{3})^{2j+1}$ est donc strictement inférieure à $2\frac{1}{9}\sum_{j\geq 1}(\frac{1}{9})^j = 2\frac{1}{9}\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}} = 2\frac{1}{72}$, d'où la majoration $\mathrm{Log}\, 2 < 2\,(\frac{1}{3} + \frac{1}{72})$. On prendra note que si l'on calcule explicitement ces inégalités donnent les deux premières décimales de $\mathrm{Log}\, 2 = 0,693147\ldots$.

2 Exercice

Soit $\sqrt{z}$ la détermination principale de la racine carrée sur l'ouvert $\Omega = \mathbf{C}\backslash]-\infty, 0]$, c'est-à-dire $\sqrt{z} = \exp(\frac{1}{2}\operatorname{Log} z)$.

2.1 Que vaut $\sqrt{i}$? Que vaut $\sqrt{-i}$?

corr.: $\operatorname{Log}(i) = i\,\frac{\pi}{2}$, donc $\sqrt{i} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$. De même $\sqrt{-i} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$.

2.2 Soit $\gamma : [0, \frac{\pi}{2}] \to \Omega$, $\theta \mapsto \gamma(\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. Calculer $\int_\gamma \sqrt{z}\,dz$.

corr.: Avec $z = \gamma(\theta) = e^{i\theta}$, et $dz = i\,e^{i\theta}\,d\theta$, on obtient, par définition, $\int_\gamma \sqrt{z}\ dz = \int_0^{\pi/2} e^{i\theta/2} i\,e^{i\theta}\,d\theta = i\int_0^{\pi/2} e^{3i\theta/2}\,d\theta = i\left[\frac{2}{3i}e^{3i\theta/2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}(e^{3i\pi/4} - 1) = \frac{2}{3}(-\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + i\,\frac{\sqrt{2}}{2})$.

2.3 Montrer que $\sqrt{z}$ possède une primitive F sur Ω que l'on déterminera explicitement sous la condition $F(1) = \frac{2}{3}$.

corr.: En effet l'ouvert Ω est étoilé par rapport au point 1. Donc toute fonction holomorphe admet une primitive dont on peut fixer la valeur arbitrairement en un point donné. Mais dans le cas de figure présent, on sait bien que la dérivée de z^a est az^{a-1}, donc une primitive est donnée par $\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}$. Il faut simplement préciser que l'on utilise ici aussi la détermination principale, c'est-à-dire $z^{\frac{3}{2}} = \exp(\frac{3}{2}\operatorname{Log} z)$. La dérivée est en effet, par la formule de dérivation des fonctions composées : $\frac{3}{2}\exp(\frac{3}{2}\operatorname{Log} z)\frac{1}{z} = \frac{3}{2}\exp(\frac{1}{2}\operatorname{Log} z) = \frac{3}{2}\sqrt{z}$. Et en fait la primitive trouvée $F(z) = \frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}$ vérifie $F(1) = \frac{2}{3}$ c'est donc bien celle qui est demandée.

2.4 Soit $\Gamma : [0, 2\pi] \to \Omega$, $t \mapsto 2i + e^{it}$. Que vaut $\int_\Gamma \sqrt{z}\,dz$?

corr.: Il s'agit d'un lacet dans Ω et nous venons de voir que $\sqrt{z}$ admet une primitive. L'intégrale est nulle.

3 Exercice

Dans cet exercice on se donne, sur un ouvert $U \subset \mathbf{C}$, une fonction f à valeurs complexes. On supposera que les dérivées partielles jusqu'au deuxième ordre $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existent et sont des fonctions continues de $z = x + iy$.

Soit $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ le « Laplacien ». On rappelle que l'on dit qu'une fonction F est harmonique sur un ouvert U si elle admet des dérivées partielles continues jusqu'au deuxième ordre et si $\Delta F = 0$

sur U.

3.1 Soit g la fonction $z \mapsto g(z) = zf(z)$. Prouver :

$$\Delta g = 2\frac{\partial f}{\partial x} + 2i\,\frac{\partial f}{\partial y} + (x+iy)\Delta f$$

corr.: On a $g = (x+iy)f$ donc $\frac{\partial}{\partial x} g = f + (x+iy)\frac{\partial}{\partial x} f$, $(\frac{\partial}{\partial x})^2 g = 2\frac{\partial}{\partial x} f + (x+iy)(\frac{\partial}{\partial x})^2 f$. De même $\frac{\partial}{\partial y} g = if + (x+iy)\frac{\partial}{\partial y} f$ et $(\frac{\partial}{\partial y})^2 g = 2i\frac{\partial}{\partial y} f + (x+iy)(\frac{\partial}{\partial y})^2 f$. En faisant la somme cela donne la formule demandée.

3.2 Prouver que f est holomorphe sur U si et seulement si à la fois f et $g = zf$ sont des fonctions harmoniques sur U.

corr.: On sait déjà, vu en en cours et/ou tds, que toute fonction holomorphe est harmonique (ses parties réelle et imaginaire sont des fonctions harmoniques à valeurs réelles, la fonction holomorphe est harmonique à valeurs complexes). Et si f est holomorphe, zf l'est aussi. Donc f et zf sont toutes deux harmoniques. Réciproquement, par la formule de la question précédente si f et $g = zf$ sont harmoniques, alors on obtient $2\frac{\partial f}{\partial x} + 2i\,\frac{\partial f}{\partial y} = \Delta g - (x+iy)\Delta f = 0$, donc $\frac{\partial f}{\partial x} + i\,\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x}$. Cela n'est qu'une des formes usuelles pour les équations de Cauchy-Riemann, donc f est holomorphe. L'équivalence est démontrée.

