Université Lille 1 — UFR de Mathématiques
Licence de Mathématiques (S5, année 2005–2006)
M305 : ANALYSE COMPLEXE

EXAMEN (PARTIEL) DU 9 NOVEMBRE 2005
(durée : 2 Heures)

Ni documents ni calculatrices

Responsable : Jean-François Burnol

1 Exercice

1.1 On considère la série entière :

$$F(w) = 2w + \frac{2}{3}w^3 + \frac{2}{5}w^5 + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2\,w^{2j+1}}{2j+1}$$

Déterminer le rayon de convergence de cette série.

1.2 On suppose $|w| < 1$. Prouver : $F(w) = \mathrm{Log}(1+w) - \mathrm{Log}(1-w)$.

1.3 On suppose $|w| < 1$ et $\mathrm{Im}(w) \geq 0$. Prouver $0 \leq \mathrm{Arg}(1+w) < \frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2} < \mathrm{Arg}(1-w) \leq 0$. Quelles sont les inégalités lorsque $\mathrm{Im}(w) \leq 0$? Montrer :

$$|w| < 1 \quad \Longrightarrow \quad |\,\mathrm{Arg}(1+w) - \mathrm{Arg}(1-w)| < \pi$$

1.4 On suppose $|w| < 1$. Justifier : $F(w) = \mathrm{Log}(\dfrac{1+w}{1-w})$.

1.5 On suppose $|w| < 1$ et on pose $z = \frac{1+w}{1-w}$. Montrer $|z-1| < |z+1|$. En déduire $\mathrm{Re}(z) > 0$.

1.6 Réciproquement montrer que pour tout z avec $\mathrm{Re}(z) > 0$ il existe un unique w tel que $z = \frac{1+w}{1-w}$. Exprimer w en fonction de z et prouver $|w| < 1$.

1.7 En déduire : $\quad \mathrm{Re}(z) > 0 \implies \quad \mathrm{Log}\, z = 2\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2j+1}(\frac{z-1}{z+1})^{2j+1}$.

1.8 En déduire : $2\,(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{81}) < \mathrm{Log}\, 2 < 2\,(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{72})$.

TOURNEZ LA PAGE

2 Exercice

Soit $\sqrt{z}$ la détermination principale de la racine carrée sur l'ouvert $\Omega = \mathbf{C} \setminus]-\infty, 0]$, c'est-à-dire $\sqrt{z} = \exp(\frac{1}{2} \operatorname{Log} z)$.

2.1 Que vaut $\sqrt{i}$? Que vaut $\sqrt{-i}$?

2.2 Soit $\gamma : [0, \frac{\pi}{2}] \to \Omega$, $\theta \mapsto \gamma(\theta) = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$. Calculer $\int_\gamma \sqrt{z}\, dz$.

2.3 Montrer que $\sqrt{z}$ possède une primitive F sur Ω que l'on déterminera explicitement sous la condition $F(1) = \frac{2}{3}$.

2.4 Soit $\Gamma : [0, 2\pi] \to \Omega$, $t \mapsto 2i + e^{it}$. Que vaut $\int_\Gamma \sqrt{z}\, dz$?

3 Exercice

Dans cet exercice on se donne, sur un ouvert $U \subset \mathbf{C}$, une fonction f à valeurs complexes. On supposera que les dérivées partielles jusqu'au deuxième ordre $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existent et sont des fonctions continues de $z = x + iy$.

Soit $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ le « Laplacien ». On rappelle que l'on dit qu'une fonction F est harmonique sur un ouvert U si elle admet des dérivées partielles continues jusqu'au deuxième ordre et si $\Delta F = 0$ sur U.

3.1 Soit g la fonction $z \mapsto g(z) = z f(z)$. Prouver :

$$\Delta g = 2 \frac{\partial f}{\partial x} + 2i \frac{\partial f}{\partial y} + (x + iy) \Delta f$$

3.2 Prouver que f est holomorphe sur U si et seulement si à la fois f et $g = zf$ sont des fonctions harmoniques sur U.