Université Lille 1 — UFR de Mathématiques
Licence de Mathématiques (S5, année 2005–2006)

L305 : ANALYSE COMPLEXE
Responsable : Jean-François Burnol

FEUILLE DE TRAVAIL (5)

1 Problème

1.1 Prouver pour $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}$$

en utilisant le secteur angulaire $0 \leq \operatorname{Arg} z \leq \frac{2\pi}{n}$, $0 \leq |z| \leq R$, $R \to +\infty$, et en montrant que la contribution de l'arc de cercle tend vers zéro pour $R \to +\infty$.

1.2 (suite) Montrer, en utilisant les contours $\epsilon \leq x \leq R$, $z = Re^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{a})$, $z = re^{i\frac{2\pi}{a}}$ $(R \geq r \geq \epsilon)$, $z = \epsilon e^{i\theta}$ $(\frac{2\pi}{a} \geq \theta \geq 0)$:

$$a \in \mathbf{R},\ a > 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^a} = \frac{\pi/a}{\sin(\pi/a)}\ .$$

Pour définir z^a comme fonction holomorphe sur $\{z = re^{i\alpha} \,|\, 0 < r < \infty,\ 0 \leq \alpha \leq \frac{2\pi}{a}\}$, on pose $z^a = r^a e^{a\, i\alpha} = \exp(a(\log r + i\alpha))$ (car $\log r + i\alpha = \operatorname{Log}(ze^{-i\frac{\pi}{a}}) + \frac{\pi}{a}$; no comments).

1.3 (suite) Soit $J(a) = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^a}$; justifier que l'intégrale définissant $J(a)$ est convergente et analytique comme fonction de a pour $\operatorname{Re}(a) > 1$ et prouver $J(a) = \frac{\pi/a}{\sin(\pi/a)}$.

1.4 (suite) On définit maintenant

$$K(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{pt}}{1+e^t} dt$$

pour $0 < p < 1$. Justifier les identités (pour $0 < p < 1$) :

$$K(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{pt}}{1+e^t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{1+t} dt = \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^{1/p}} = \frac{1}{p} J(\frac{1}{p}) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$$

1.5 (suite) Expliquer pourquoi l'intégrale $K(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{pt}}{1+e^t} dt$ est convergente et analytique pour p complexe avec $0 < \operatorname{Re}(p) < 1$ et établir la formule $K(p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$ pour $0 < \operatorname{Re}(p) < 1$.

1.6 (suite) Donner une preuve simple directe de la formule $K(p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$ pour tout p complexe avec $0 < \operatorname{Re}(p) < 1$ en appliquant le théorème des résidus avec des contours liés aux droites $z = x$, $x \in \mathbf{R}$ et $z = x + 2\pi i$, $x \in \mathbf{R}$.

1.7 (suite) Déduire de ce qui précède avec $p = \frac{1}{2} + i\xi$, $\xi \in \mathbf{R}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\xi t)}{\mathrm{ch}(t/2)} dt = \frac{2\pi}{\mathrm{ch}(\pi\xi)} \ ,$$

Montrer que la transformation de Fourier $\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}} e^{2\pi i\xi x} f(x)\, dx$ appliquée à la fonction $f(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}(\pi x)}$ donne simplement $\widehat{f} = f$ (remarque : c'est aussi le cas avec $f(x) = e^{-\pi x^2}$).

1.8 (suite) On revient à la formule générale $K(p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$. En séparant parties réelles et imaginaires dans $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{pt}}{1+e^t} dt$ déterminer (en simplifiant le plus possible) les valeurs de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ut}\cos(vt)}{1+e^t} dt \qquad , \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ut}\sin(vt)}{1+e^t} dt \ ,$$

pour $0 < u < 1$, $v \in \mathbf{R}$.

2 Divers

2.1 Déterminer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(2+e^{ix})} dx.$

2.2 Déterminer $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix} \frac{x-i}{x+i} \frac{1}{x^2+1} dx$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix} \frac{x-i}{x+i} \frac{1}{x^2+1} dx.$

2.3 Déterminer $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x(x^2+1)} dx.$

2.4 Montrer que les racines du polynôme $P(z) = z^{111} + 3z^{50} + 1$ vérifiant $|z| < 1$ sont simples et qu'il y en a exactement 50. Ind. : utiliser le théorème de Rouché en écrivant $P(z) = 3z^{50} + (z^{111} + 1)$. Calculer P' pour s'assurer que les racines avec $|z| < 1$ sont simples.

2.5 Déterminer l'image par $z \mapsto \frac{3z+5}{z+2}$ du cercle unité, du cercle de rayon 2 centré en 1, du cercle de rayon 2 centré en l'origine ; de la droite imaginaire, de la droite d'équation $x = y$, de la droite verticale passant en 3, de la droite verticale passant en -2.

2.6 Question de cours : quels sont les automorphismes de $D(0,1)$ avec 0 comme point fixe ?

2.7 Soit α avec $|\alpha| < 1$. On sait que $z \mapsto \phi_\alpha(z) = \frac{\alpha - z}{1-\overline{\alpha}z}$ est un automorphisme du disque unité $D(0,1)$. Trouver z_1 et z_2 avec $\phi_\alpha(z_1) = z_2$, $\phi_\alpha(z_2) = z_1$. Deux points distincts arbitraires z_1 et z_2 étant donnés dans $D(0,1)$, montrer qu'il existe un automorphisme les échangeant et que cet automorphisme est unique (on se ramènera au cas où l'un des points est l'origine).

2.8 Trouver l'unique automorphisme du premier quadrant qui échange $1+i$ et $2+2i$. On remarquera que $z \mapsto z^2$ est une bijection analytique du premier quadrant sur le demi-plan supérieur, et que l'on peut donc ramener le problème à une question dans le demi-plan supérieur.

2.9 Soit f holomorphe sur $\overline{D(0,1)}$. On suppose $|f(w)| \leq 8$ pour tout $|w| \leq 1$ et $f(\frac{3}{4}) = 0$. Montrer $|f(0)| \leq 6$. Indication : trouver un automorphisme ϕ du disque avec $\phi(0) = \frac{3}{4}$ et utiliser le Lemme de Schwarz pour la fonction $\frac{1}{8} f(\phi(z))$. Trouver le z avec $\phi(z) = 0$.

