Université Lille 1 — UFR de Mathématiques
Licence de Mathématiques (S5, année 2005–2006)

L305 : ANALYSE COMPLEXE

Responsable : Jean-François Burnol

FEUILLE DE TRAVAIL (4)

1 Divers

1.1 Montrer qu'il existe une (unique) fonction analytique sur $\mathbf{C} \setminus [-1, 1]$ qui vaut $\sqrt{a^2 - 1}$ pour $a > 1$. Indication : montrer pour commencer que la formule $f(a) = \exp(\frac{1}{2}\operatorname{Log}(a - 1) + \frac{1}{2}\operatorname{Log}(a + 1))$ donne une solution sur l'ouvert $\mathbf{C} \setminus]-\infty, 1]$. Puis montrer que $g(a) = -\exp(\frac{1}{2}\operatorname{Log}(-a - 1) + \frac{1}{2}\operatorname{Log}(-a + 1)) = -f(-a)$ est analytique sur $\mathbf{C} \setminus [-1, +\infty[$. Enfin montrer que $g(a) = f(a)$ dans le demi-plan supérieur et aussi dans le demi-plan inférieur en calculant $f(\pm i)$ et donc $g(\pm i)$ et en expliquant pourquoi a priori le quotient $g(a)/f(a)$ est constant dans ces deux demi-plans.

1.2 On considère la fonction analytique $\phi(a) = \operatorname{Log}(a - 1) - \operatorname{Log}(a + 1)$ dans le demi-plan supérieur et la fonction analytique $\psi(a) = \operatorname{Log}(a - 1) - \operatorname{Log}(a + 1)$ dans le demi-plan inférieur. Montrer que ϕ et ψ sont la restriction à leurs demi-plans respectifs d'une fonction analytique sur $\mathbf{C} \setminus [-1, +1]$. Indication : il y a plusieurs raisonnements possibles et plusieurs indications possibles. Donc, débrouillez vous.

1.3 (suite) On considère la fonction $a \mapsto \frac{a-1}{a+1}$. Quelle est l'image par cette fonction de l'intervalle $]-1, 1[$? Quelle est l'image par cette fonction de $\mathbf{C} \setminus [-1, +1]$? En déduire que la fonction composée $\Phi(a) = \operatorname{Log} \frac{a-1}{a+1}$ existe et est analytique sur $\mathbf{C} \setminus [-1, +1]$. Retrouver le résultat de l'exercice précédent (et montrer que ϕ, ψ et Φ coïncident dans les intersections deux-à-deux de leurs ouverts de définitions).

1.4 (suite) Quel est le développement en série de Laurent de la fonction analytique Φ dans la couronne $1 < |a| < \infty$? Que vaut par exemple $\int_{|a|=2} \Phi(a) a^{18} da$?

1.5 Prouver pour $a > 1$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{a + \sin\theta} d\theta = \frac{\sqrt{a^2 - 1} - a}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

En utilisant l'un des exercices précédents montrer que la formule a un sens et est valable pour $a \in \mathbf{C} \setminus [-1, +1]$.

1.6 Que vaut en fonction de $R > 0$

$$\int_{|z|=R} \frac{z^2 + 1}{z^3 - z^2 - 4z + 4} dz \ ?$$

1.7 Soit $P(z) = Az^4 + \dots$ un polynôme de degré au plus 4. Montrer que $\int_{|z|=R} \frac{P(z)}{z^5-1}\,dz$ est indépendant de R pour $R > 1$. En faisant tendre R vers l'infini en déduire que cette valeur constante est $2\pi i A$. Prouver alors via le théorème des résidus : $A = \frac{1}{5}\sum_{w^5=1} wP(w)$.

1.8 (Résidu à l'infini) Soit f une fonction analytique pour $\{|z| > R\}$. On pose :

$$\text{Rés}(f, \infty) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} f(z)dz$$

avec C_r le cercle $\{|z| = r\}$ parcouru dans le sens direct. Montrer que le terme de droite est bien indépendant de $r > R$. On notera le signe $-$. On dit que $\text{Rés}(f, \infty)$ est le « résidu à l'infini » de f. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$ à l'exception d'un nombre fini de singularités isolées. Montrer le théorème suivant : *la somme de tous les résidus (y-compris celui à l'infini) de f est nulle.*

1.9 Soit f une fonction holomorphe sur $\overline{\Omega}\setminus\{z_1, \dots, z_N\}$, avec Ω le domaine intérieur à une courbe de Jordan γ. Soit $g_n(z)$ la partie principale (partie singulière) de f en la singularité isolée z_n. Prouver **la formule intégrale générale de Cauchy** :

$$\forall z \in \Omega \setminus \{z_1, \dots, z_N\} \qquad f(z) = \sum_{1\le n\le N} g_n(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{f(w)}{w-z}dw$$

Pour cela, remarquer d'abord $\text{Rés}(\frac{f(w)}{w-z}, z_n) = \text{Rés}(\frac{g_n(w)}{w-z}, z_n)$; puis montrer que le résidu à l'infini de la fonction $\frac{g_n(w)}{w-z}$ de $w \in \mathbf{C}\setminus\{z_n\}$, est nul. Utiliser l'exercice **1.8**.

2 Contours infinis

2.1 (Morceaux de Résidus) Soit f présentant en z_0 un **pôle simple**. Soit $C_r(\alpha, \beta)$ l'arc de cercle $w = z_0 + re^{i\theta}$, $\alpha \le \theta \le \beta$, parcouru dans le sens direct des θ et avec $0 < \beta - \alpha \le 2\pi$. Prouver :

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r(\alpha,\beta)} f(z)\,dz = 2\pi i\,\frac{\beta-\alpha}{2\pi}\,\text{Rés}(f, z_0)$$

Que se passe-t-il si le pôle est d'ordre plus élevé ?

2.2 (Lemme de Jordan) Soit f une fonction définie et continue sur le domaine $\{\text{Im}(z) > 0, |z| > R\}$, ou seulement sur une suite de demi-cercles $\{\text{Im}(z) > 0, |z| = R_n\}$ de rayons tendant vers l'infini. On suppose $\lim_{\substack{|z|\to\infty \\ \text{Im}(z)>0}} |f(z)| = 0$ (ou $\lim_{n\to\infty} \sup_{\text{Im}(z)>0,\, |z|=R_n} |f(z)| = 0$.) Montrer (on utilisera $\sin(\theta) \ge \frac{2}{\pi}\theta$ pour $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$) :

$$\lim_{R\to\infty}\int_{z=Re^{i\theta},\, 0<\theta<\pi} f(z)e^{iz}\,dz = 0 \qquad \text{(ou l'analogue avec les } R_n\text{)}$$

2.3 En considérant l'intégrale de $\frac{e^{iz}}{z}$ sur un contour allant de $-R$ à $+R$ le long de l'axe réel en contournant 0 par un petit demi-cercle, puis qui revient de $+R$ à $-R$ par le demi-cercle dans le demi-plan supérieur, démontrer $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

2.4 Déterminer les intégrales (semi-convergentes) de Fresnel $\int_0^\infty \cos(x^2)dx$ et $\int_0^\infty \sin(x^2)dx$ en considérant l'intégrale de $\exp(-z^2)$ sur le contour $z = x$, $0 \le x \le R$, $z = R\exp(i\theta)$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$, $z = xe^{i\frac{\pi}{4}}$, $R \ge x \ge 0$. On rappelle l'identité $\int_{\mathbf{R}} \exp(-\pi u^2)du = 1$.

2.5 Que vaut $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$? (faire un changement de variable $t = \pi u^2$ pour se ramener à la Gaussienne). En considérant un contour passant par l'axe réel, puis un quart de cercle, puis l'axe imaginaire, puis un petit quart de cercle évitant l'origine prouver :

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \exp(i\frac{\pi}{4}) \int_0^\infty \frac{e^{-ix}}{\sqrt{x}} dx$$

et en déduire les valeurs des intégrales $\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$ et $\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ (qui ne sont que semi-convergentes). Comparer aux intégrales de Fresnel.

2.6 Reprendre l'exercice précédent et déterminer pour $0 < a < 1$ les valeurs des intégrales (semi-convergentes)

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^a} dx \qquad \text{et} \qquad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^a} dx$$

en utilisant la fonction Gamma. À propos prouver que ces intégrales ne sont que semi-convergentes (*i.e.* pas absolument convergentes).

2.7 Confirmer par le calcul des résidus la valeur connue (Arctg . . . !) :

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{dx}{1 + x^2} = \pi$$

On appliquera le théorème des résidus au contour direct comportant le segment $[-R, +R]$ et le semi-cercle de rayon R dans le demi-plan supérieur, pour $R \to +\infty$.

2.8 Justifier $\int_{\mathbf{R}} \frac{e^{i\xi x}}{1+x^2} dx = \int_{\mathbf{R}} \frac{\cos(\xi x)}{1+x^2} dx$ pour $\xi \in \mathbf{R}$. Prouver par un calcul de résidu

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{e^{i\xi x}}{1 + x^2} dx = \pi e^{-|\xi|} \ .$$

Suivant le cas $\xi \geq 0$ ou $\xi < 0$ on complètera le segment $[-R, +R]$ par un semi-cercle dans le demi-plan supérieur, ou inférieur, afin que la contribution du semi-cercle tende vers 0 pour $R \to \infty$. On peut aussi observer que l'intégrale est une fonction paire de ξ et que l'on peut donc se restreindre à $\xi \geq 0$.

2.9 Prouver, pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} e^{-i\xi x} (\pi e^{-|\xi|}) d\xi = \frac{1}{1 + x^2} \ .$$

Il suffit d'évaluer séparément $\int_{-\infty}^0$ et $\int_0^\infty$ en utilisant le fait que exp est sa propre primitive (ce calcul n'utilise donc pas la notion de fonction analytique et le théorème des résidus). On remarquera que l'on retombe sur la fonction $1/(1+x^2)$, ce qui n'est pas un hasard (formule d'inversion pour les transformations intégrales de Fourier).

2.10 Déterminer

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{1 + x^4} dx \qquad \int_{\mathbf{R}} \frac{1 + x^2}{1 + x^4} dx \qquad \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{1 + x^2 + x^4} dx$$

2.11 Préciser pourquoi $\int_{\mathbf{R}} \frac{e^{i\xi x}}{1+x^4} dx$ est une intégrale convergente pour $\xi \in \mathbf{R}$, est une fonction réelle et paire de ξ, et utiliser un calcul de résidus pour établir, pour $\xi \geq 0$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\xi x)}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{2} e^{-\xi/\sqrt{2}} \sin(\frac{\xi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4})$$

Cette formule est-elle valable pour $\xi < 0$?

2.12 Déterminer

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$$

Pour ce calcul, on considérera le contour allant le long de l'axe réel de 0 à R puis de R à jR le long d'un cercle puis de jR à 0 par un segment ($j = \exp(i\frac{2\pi}{3})$). On écrira d'une part chacune des trois contributions à l'intégrale de contour, en faisant attention au sens de parcours, et l'on utilisera d'autre part le théorème des résidus.

2.13 (suite) On note, pour $|w| = 1$ et certaines valeurs spéciales de w (que l'on précisera) étant exclues, $J(w)$ l'intégrale $\int \frac{dz}{1+z^3}$ le long du segment infini $w\mathbf{R}^+$. Déterminer $J(w)$ en fonction de w.

3 Développement de $\frac{\pi}{\sin \pi z}$ et produit infini de Euler

Le but de ce problème est d'établir les deux formules importantes :

$$\forall z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{Z} \quad \frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + \lim_{\substack{N\to+\infty \\ M\to+\infty}} \sum_{\substack{-M\leq n\leq N \\ n\neq 0}} \frac{(-1)^n}{z-n} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2-n^2}$$

$$\forall z \in \mathbf{C} \qquad \sin(\pi z) = \lim_{N\to\infty} \pi z \prod_{n=1}^{N} (1 - \frac{z^2}{n^2})$$

3.1 Montrer la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z-n}$ (regarder les sommes partielles pour les indices pairs).

3.2 (suite) On pose $f(w) = \frac{\pi}{\sin \pi w}$. Soit $z \notin \mathbf{Z}$ fixé, soit $N > |z| - \frac{1}{2}$ et $\mathcal{R}_N$ le carré $\{|x| \leq N + \frac{1}{2}, |y| \leq N + \frac{1}{2}\}$, et $C_N = \partial \mathcal{R}_N$ son bord parcouru dans le sens direct. Exprimer $\frac{1}{2\pi i} \int_{C_N} \frac{f(w)}{w-z} dw$ à l'aide du Théorème des résidus.

3.3 (suite) Montrer $\int_{C_N} \frac{f(w)}{w} dw = 0$ (on notera que f est impaire) et en déduire

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_N} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_N} \frac{\pi}{\sin \pi w} \frac{z}{w(w-z)} dw$$

3.4 (suite) On rappelle l'identité $\sin(w) = \sin(x)\operatorname{ch}(y) + i\cos(x)\operatorname{sh}(y)$ pour $w = x + iy$. Montrer $|\sin w|^2 = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y$ ($x, y \in \mathbf{R} \dots$). En déduire $|\sin(\pi w)| = \operatorname{ch}(\pi y) \geq 1$ sur les bords verticaux du carré et $|\sin(\pi w)| \geq \operatorname{sh}(\pi(N + \frac{1}{2})) \geq \operatorname{sh}(\pi\frac{1}{2}) = 2.301 \dots \geq 1$ sur les bords horizontaux. Conclure la preuve de

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2-n^2}$$

avec convergence uniforme pour $|z|$ borné.

3.5 (suite) Reprendre la même technique et prouver :

$$\forall z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{Z} \quad \frac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \lim_{N \to \infty} \sum_{-N \leq n \leq N} \frac{1}{z-n} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} ,$$

avec convergence uniforme pour $|z|$ borné (on peut aussi le déduire du résultat précédent ; comment ?)

On veut maintenant prouver : $\sin(\pi z) = \lim_{N \to \infty} \pi z \prod_{n=1}^{N}(1 - \frac{z^2}{n^2})$ On fixe une fois pour toutes $R > 0$, et on va montrer la formule pour $|z| < R$.

3.6 Soit N avec $N > R$ et notons $f_N(z) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} \prod_{n=1}^{N}(1 - \frac{z^2}{n^2})$, prolongé par continuité en les n, $|n| \leq N$. Montrer que f_N est holomorphe et ne s'annule pas sur $D(0, R)$.

3.7 (suite) Soit $\gamma : [0, 1] \to \mathbf{C}^*$ le chemin $\gamma(t) = f_N(tz)$. On a donc $\gamma(0) = 1$, $\gamma(1) = f_N(z)$, et $\gamma(t) \neq 0$ pour tout t. Par un théorème démontré en cours (lequel ?) on a $\gamma(1) = \gamma(0) \exp\left(\int_\gamma \frac{dw}{w}\right)$. En déduire $f_N(z) = \exp\left(\int_0^1 \frac{f_N'(tz)}{f_N(tz)} z dt\right)$

3.8 (suite) Soit $\epsilon > 0$. En utilisant la convergence uniforme pour $|z|$ borné du développement en fractions de $\pi \operatorname{cotg}(\pi z)$, montrer que pour N suffisamment grand on a $|f_N'(w)| \leq \epsilon |f_N(w)|$ pour tout $w \in D(0, R)$, puis en déduire

$$N \gg 0 \quad |z| < R \implies \quad |f_N(z)| \leq e^{\epsilon |z|} \leq e^{\epsilon R}$$

3.9 (suite) En déduire $\lim_{N \to \infty} f_N(z) = 1$, uniformément sur $D(0, R)$. Conclure la preuve du produit infini de Euler pour $\sin(z)$.

4 Produits infinis

Au cas où je ne l'ai pas rédigé dans le polycopié j'explique ce qu'il y a à savoir : on écrit $L = \prod_{n=1}^{\infty} q_n$ si $L = \lim_{N \to \infty} q_1 q_2 \cdots q_N$. Supposons tous les q_n non nuls. On dira que le « produit infini converge » si, non seulement L existe, mais de plus $L \neq 0$. On démontre (ce n'est pas évident avec des q_n complexes, ou négatifs, et je vous conseille fortement d'y réfléchir) que c'est le cas si et seulement si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log} q_n$ est convergente (par convention $\operatorname{Log}(-1) = +i\pi$). Lorsque certains des q_n sont nuls, on dit que le produit converge si il existe N avec $q_n \neq 0$ pour $n \geq N$ et si $\prod_{n=N}^{\infty} q_n$ converge. Lorsque le produit converge on a nécessairement (pourquoi ?) $\lim q_n = 1$ (c'est nécessaire, pas suffisant). Nous travaillerons principalement avec des produits « absolument convergents » :

4.1 (Produit absolument convergent) Soit u_n, $n \geq 1$ des nombres complexes. Montrer : $1 + \sum_{n=1}^{N} |u_n| \leq \prod_{n=1}^{N}(1 + |u_n|) \leq e^{\sum_{n=1}^{N} |u_n|}$. En déduire que la suite croissante $\prod_{n=1}^{N}(1 + |u_n|)$ a une limite finie si et seulement si $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| < \infty$. On suppose maintenant être dans ce cas, et de plus $\forall n \; 1 + u_n \neq 0$. Montrer alors $\sum_{n=1}^{\infty} |\operatorname{Log}(1 + u_n)| < \infty$, et en déduire que $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + u_n)$ converge. On conviendra donc de dire que $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + u_n)$ est « absolument convergent » si $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| < \infty$, et on vient donc de prouver qu'un produit absolument convergent est convergent. C'est principalement, la seule chose que vous ayez à savoir sur ce sujet.

4.2 Pour quelles valeurs de p (réel) $\prod_{k=1}^{\infty}(1+k^{-p})$ converge ?

4.3 Étant admis que $\sin(\pi z) = \pi z \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)$, prouver :

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{k}\right) e^{\frac{z}{k}}$$

et justifier la convergence absolue du produit.

4.4 Étant admis $\sin(\pi z) = \pi z \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)$, prouver :

$$\sin(\pi z) = \pi z \lim_{N\to\infty} \prod_{k=-N, k\neq 0}^{+N} \frac{z-k}{-k} ,$$

puis établir pour tout $\alpha \notin \mathbf{Z}$:

$$\sin(\pi(z-\alpha)) = -\sin(\pi\alpha) \lim_{N\to\infty} \prod_{k=-N}^{+N} \left(1 - \frac{z}{\alpha+k}\right)$$

Montrer que le résultat reste valable si l'on remplace dans le produit $-N$ par $-N \pm 1$ ou $+N$ par $+N \pm 1$. En déduire :

$$\cos(\pi z) = \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(\frac{1}{2}+k)^2}\right)$$

avec un produit absolument convergent.

4.5 (suite) On rappelle la formule $\pi \operatorname{cotg}(\pi\alpha) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{+N} \frac{1}{\alpha-k}$, pour $\alpha \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}$. Montrer :

$$\frac{\sin(\pi(\alpha-z))}{\sin(\pi\alpha)} = e^{-\pi \operatorname{cotg}(\pi\alpha) z} \prod_{k=-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha+k}\right) e^{\frac{z}{\alpha+k}}$$

avec un produit absolument convergent.

4.6 Établir la convergence et évaluer les produits infinis suivants :

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right) \qquad \prod_{n=2}^{\infty}\left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right)$$

$$\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1} \qquad \prod_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^2}$$

Les trois premiers s'obtiennent par des réarrangements simples. Pour le dernier, utiliser le produit infini de $\sin z$.

4.7 On suppose $\sum_{n\geq 1} |u_n|^2 < \infty$. Montrer que les deux séries $\sum u_n$ et $\sum \operatorname{Log}(1+u_n)$ sont soit toutes deux convergentes soit toutes deux divergentes (on suppose $\forall n\ u_n \neq -1$). Donc si $\sum_{n\geq 1} |u_n|^2 < \infty$ le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ est convergent si et seulement si la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge.

4.8 (suite) Montrer que $\prod_{k=1}^{\infty}(1+\frac{i}{k})$ diverge tandis que $\prod_{k=1}^{\infty}\left|1+\frac{i}{k}\right|$ converge.

