Université Lille 1 — UFR de Mathématiques
Licence de Mathématiques (S5, année 2005–2006)

L305 : ANALYSE COMPLEXE

Responsable : Jean-François Burnol

FEUILLE DE TRAVAIL (3)

1

1.1 Soit $\Omega = \mathbf{C} \setminus \{]-\infty, 0]\}$. Déterminer en tout $z_0 \in \Omega$ la série de Taylor de la fonction holomorphe $z \mapsto \operatorname{Log} z$ ainsi que son rayon de convergence. Soit z_0 avec $\operatorname{Re}(z_0) < 0$. Soit R_0 le rayon de convergence pour z_0 et soit $f(z)$ la somme de la série dans $D(z_0, R_0)$. A-t-on $f(z) = \operatorname{Log} z$ dans $D(z_0, R_0)$?

1.2 On considère la fonction analytique $f(z) = \frac{1}{\sin(z)}$ sur l'ouvert U complémentaire de $\pi\mathbf{Z}$. Vérifier que la fonction $\sin(z)$ ne s'annule jamais sur U. Déterminer en tout $z_0 \in U$ donné le rayon de convergence du développement en série de Taylor de f. Remarque : il est déconseillé de chercher à résoudre ce problème en déterminant explicitement les coefficients des séries de Taylor.

1.3 Soient f et g deux fonctions entières avec $\forall z\ f(z)g(z) = 0$. Montrer que l'une des deux est identiquement nulle.

1.4 Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert **convexe** U. Soit $z_1 \in U$, on suppose que le rayon de convergence de la série de Taylor de f en z_1 est R_1. De même en $z_2 \in U$ on suppose que le rayon de convergence de la série de Taylor de f est R_2. Soit g_1 sur le disque ouvert $D(z_1, R_1)$ la somme de la série de Taylor de f en z_1 et de même g_2 sur $D(z_2, R_2)$. Soit $V = D(z_1, R_1) \cap D(z_2, R_2)$. Montrer que si V est non vide alors $g_1 = g_2$ sur V. On commencera par montrer que $V \cap U$ est non vide aussi. **Attention** : en général, sans hypothèse spéciale comme la convexité de U cela est complètement faux ; donner un exemple, avec U connexe, mais pas convexe, tel que $g_1 \neq g_2$ sur V (et on peut même faire avec $V \cap U \neq \emptyset$). Il suffira d'utiliser l'exercice 1.1.

2 Deux séries de Fourier

2.1 Soit Ω l'ouvert habituel sur lequel est défini $\operatorname{Log} z$. Justifier pour tout $z \in \Omega$

$$\operatorname{Log}(z) = \int_0^1 \frac{z-1}{1+t(z-1)} dt ,$$

et donner une formule intégrale explicite pour le reste $R_N(z)$ dans :

$$\operatorname{Log}(z) = (z-1) - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} - \cdots + (-1)^{N-1}\frac{(z-1)^N}{N} + R_N(z) .$$

2.2 (suite) On suppose $\mathrm{Re}(z) \geq \delta$ pour un certain $\delta \in]0,1[$. Prouver

$$|R_N(z)| \leq \frac{1}{\delta} \frac{|z-1|^{N+1}}{N+1}$$

On minorera $|1 + t(z-1)|$ par δ.

2.3 (suite) En déduire que la série de Taylor de Log au point 1 est uniformément convergente sur le compact $\{|z-1| \leq 1, \delta \leq \mathrm{Re}(z)\}$.

2.4 (suite) Pour $-\pi < \phi < +\pi$ on pose $z = 1 + e^{i\phi}$. Déterminer les coordonnées polaires $|z|$ et $\mathrm{Arg}(z)$ de z en fonction de ϕ. Déduire de ce qui précède les identités suivantes, pour tout $\phi \in]-\pi, +\pi[$:

$$\log(2\cos\frac{\phi}{2}) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\cos k\phi}{k}$$
$$\frac{\phi}{2} = \sum_{k=1} (-1)^{k-1} \frac{\sin k\phi}{k}$$

et le fait que ces séries sont uniformément convergentes sur tout intervalle $[-\pi + \epsilon, +\pi - \epsilon]$ $(0 < \epsilon < \pi)$.

3 Principe du Maximum

3.1 Soit f une fonction continue sur $\overline{D(0,1)}$, holomorphe sur $D(0,1)$, nulle sur le cercle de rayon 1. Montrer que f est identiquement nulle (cela découle quasi-immédiatement de l'énoncé du Principe du Maximum dans le polycopié).

3.2 (suite) Plus fort : on ne suppose plus que $f(e^{i\theta})$ est nulle pour tout θ mais seulement pour $0 \leq \theta \leq \pi$. Montrer que f est identiquement nulle. Indication : $f(z)f(-z)$.

3.3 Soit $\phi(z) = \frac{4z+3}{4+3z}$. Montrer : $\forall \theta \in \mathbf{R} \quad |\phi(e^{i\theta})| = 1$. En déduire $|z| < 1 \implies |\phi(z)| < 1$.

3.4 Soit F une fonction entière telle que $|F(z)| \leq \frac{1}{n}$ pour $|z| = n$, $n \geq 1$. Montrer que F est identiquement nulle.

3.5 Soit f analytique sur un disque $|z - z_0| \leq R$ et telle qu'il existe un certain z_1 avec $|z_1 - z_0| < R$ tel que $|f(z)| > |f(z_1)|$ pour $|z - z_0| = R$. Montrer que f s'annule au moins une fois dans le disque ouvert $D(z_0, R)$. Indication : considérer sinon ce que dit le principe du maximum pour la fonction $\frac{1}{f}$.

3.6 (suite ; Théorème de Hurwitz) Soit f_n des fonctions holomorphes sur un voisinage commun U de $\overline{D(0,1)}$ qui convergent uniformément sur U. Soit F la fonction limite. On suppose que F n'a aucun zéro sur le cercle $|z| = 1$, et qu'elle a au moins un zéro dans le disque ouvert $D(0,1)$. Montrer en appliquant l'exercice précédent à f_n que pour $n \gg 1$ la fonction f_n a au moins un zéro dans $D(0,1)$.[1] Ce résultat est souvent appliqué sous sa forme réciproque : *si des fonctions holomorphes f_n sans zéro convergent uniformément*

1. On verra plus tard en cours ou en exercice que pour $n \gg 1$ chaque f_n a, comptés avec leurs multiplicités, exactement le même nombre de zéros que F dans $D(0,1)$.

sur un ouvert connexe vers F alors soit F est identiquement nulle soit F n'a aucun zéro. Justifier cette dernière reformulation.

3.7 Montrer que si une fonction entière f a sa partie réelle bornée supérieurement alors elle est constante (considérer $\exp(f)$).

3.8 Soit f une fonction entière telle que $|f(z)| \leq M\,(1+|z|)^n$ pour un certain M et un certain $n \in \mathbf{N}$. Donner plusieurs démonstrations que f est un polynôme de degré au plus n :

- en utilisant une formule intégrale de Cauchy pour $f^{(n+1)}(z)$, avec comme contour les cercles de rayon R centrés en l'origine, ou en z si l'on veut,
- en utilisant les formules de Cauchy pour $f^{(m)}(0)$, avec $m \geq n+1$,
- en appliquant le théorème de Liouville à $(f(z)-P(z))/z^{n+1}$ avec P le polynôme de McLaurin-Taylor à l'origine à l'ordre n.

3.9 Soit f une fonction entière vérifiant $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = +\infty$. Donner plusieurs démonstrations que f est un polynôme :

- en montrant, par un théorème du cours, que $w=0$ est une singularité polaire de $g(w) = f(\frac{1}{w})$, et en en déduisant qu'il existe un polynôme P tel que $f(z)-P(z)$ tende vers 0 pour $|z| \to \infty$, puis Liouville,
- ou en montrant que f n'a qu'un nombre fini de zéros z_j, $1 \leq j \leq n$, et en appliquant à $(z-z_1)\dots(z-z_n)/f(z)$ le résultat de l'exercice précédent, plus quelques réflexions de conclusion pour achever la preuve.

3.10 (suite) Montrer que la fonction entière $z + e^z$ tend vers l'infini le long de tout rayon partant de l'origine. D'après l'exercice précédent $z+e^z$ est donc un polynôme. Commentaires ?

4 Séries de Laurent

4.1 Déterminer les séries de Laurent et les résidus à l'origine des fonctions suivantes :

1. $f(z) = \frac{1}{z}$
2. $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$
3. $f(z) = \frac{1}{z(z^2+1)}$

4.2 Déterminer la série de Laurent à l'origine de la fonction analytique $\exp(\frac{1}{z})$, et son résidu à l'origine. En $z_0 \neq 0$ quel est le résidu de cette fonction ?

4.3 Déterminer la partie singulière, le résidu, et le terme constant des séries de Laurent à l'origine pour les fonctions :

1. $f(z) = \frac{1}{\sin z}$
2. $f(z) = \frac{1}{\sin z - \operatorname{sh} z}$
3. $f(z) = \frac{1}{z \sin(z) \operatorname{sh}(z)}$

4.4 Déterminer les séries de Laurent de $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ dans chacune des trois couronnes ouvertes $0 < |z| < 1$, $1 < |z| < 2$, $2 < |z| < \infty$, ainsi que les séries de Laurent de f aux points 0, 1, 2, et 3. Quels sont les résidus en $z=0$, $z=1$, $z=2$ et $z=3$?

5 Lacets et indices

Les théorèmes prouvés dans ces exercices seront considérés comme des théorèmes du Cours.

5.1 Montrer que tout lacet est homotopiquement trivial dans $\mathbf{C}$.

5.2 Justifier les affirmations du polycopié relatives à l'invariance de l'indice d'un lacet par rapport à un point, lorsque l'on déforme continûment soit le lacet, soit le point. Montrer que lorsque γ est un lacet il existe R tel que $|z| > R \implies \mathrm{Ind}(\gamma, z) = 0$.

5.3 Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbf{C}\setminus\{0\}$ un lacet et soit $N \in \mathbf{Z}$ son indice par rapport à 0. En utilisant la discussion, dans le polycopié, de la notion de variation de l'argument, montrer qu'il existe une fonction continue $g : [0,1] \to \mathbf{C}$ telle que $\forall t \quad \gamma(t) = e^{g(t)}$ et $g(1) - g(0) = 2\pi i N$. Montrer que toute autre fonction continue G avec $\forall t \quad \gamma(t) = e^{G(t)}$ est de la forme $g + 2\pi i k$ pour un certain $k \in \mathbf{Z}$. On pose $h(t,u) = (1-u)\ 2\pi i N\, t + u g(t)$ puis $H(t,u) = e^{h(t,u)}$. Montrer que pour chaque $u \in [0,1]$ l'application $t \mapsto H(t,u)$ est un lacet. En déduire que le lacet $c_N(t) = e^{2\pi i\, Nt}$ et γ sont homotopes dans $\mathbf{C} \setminus \{0\}$.

5.4 (suite) On considère le lacet obtenu en suivant d'abord c_N puis c_M. Montrer que ce lacet est homotope dans $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ au lacet c_{N+M} (il suffit de calculer son indice !).

5.5 On considère un lacet $\gamma : [a,b] \to \mathbf{C} \setminus \{0\}$ (donc ne passant pas par l'origine). On suppose qu'il n'existe qu'un nombre fini de $t \in [a,b]$ avec $\gamma(t) \in \Delta =]-\infty, 0[$. On les note $t_0 < t_1 < \cdots < t_N$. Pour simplifier on supposera que $\gamma(a)$ est sur Δ, donc $t_0 = a$ et $t_N = b$. Montrer que pour $t = t_j - \epsilon$, $\epsilon > 0$ suffisamment petit, le signe μ_j de $\mathrm{Im}(\gamma(t_j - \epsilon))$ ne dépend pas de ϵ, et de même pour le signe μ'_j de $\mathrm{Im}(\gamma(t_j + \epsilon))$ (préciser ce que l'on fait pour $j = 0$ et $j = N$). Si $\mu_j = +$ et $\mu'_j = -$ on dit que γ traverse Δ en $t = t_j$ dans le sens direct, si $\mu_j = -$ et $\mu'_j = +$ on dit que γ traverse Δ en $t = t_j$ dans le sens rétrograde. Sinon on dit que γ touche mais ne traverse pas Δ. En utilisant la relation entre la fonction $\mathrm{Log}(\gamma(t))$ et la variation de l'argument de $\gamma(t)$ sur chaque intervalle $]t_j, t_{j+1}[$, prouver $\Delta_{\gamma_j} \arg(z) = \pi(\mu_{j+1} - \mu'_j)$ avec $\gamma_j = \gamma$ restreint à $[t_j, t_{j+1}]$. En déduire que $\mathrm{Ind}(\gamma, 0)$ est égal au nombre de valeurs de t (a et b ne comptent que pour un seul) pour lesquelles γ traverse Δ, comptées positivement si la traversée est directe, négativement si la traversée est rétrograde. Dans la pratique vous pourrez utiliser n'importe quelle demi-droite issue de l'origine à la place de Δ à partir du moment où elle n'intersecte le lacet γ qu'en un nombre fini de points (si on n'impose pas au lacet d'être régulier, c'est-à-dire d'avoir un vecteur vitesse partout non nul, alors il peut rester figé en un même point un certain temps, et donc il faut modifier un petit peu la discussion ci-dessus qui suppose qu'il n'y a qu'un nombre fini de valeurs de t pour lesquels $\gamma(t)$ est sur la demi-droite).

6 Résidus

Note : une notation telle que $\int_{|z|=R} f(z)\, dz$ est utilisée pour l'intégrale le long du cercle de rayon R, dans le sens **direct**.

6.1 Justifier les formules du polycopié : lorsque f présente en z_0 un pôle simple on a :

$$\mathrm{Rés}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

Lorsque f présente en z_0 un pôle d'ordre au plus N on a :

$$\mathrm{Rés}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(N-1)!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{N-1} (z - z_0)^N f(z)$$

6.2 Soit g une fonction analytique ayant un zéro simple en z_0, et f une autre fonction analytique définie dans un voisinage de z_0. Montrer

$$\text{Rés}(\frac{f}{g}, z_0) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}\ .$$

6.3 (suite) On suppose que g a un zéro d'ordre n : $g(z_0 + h) = h^n(c_0 + c_1 h + \dots)$, $c_0 \neq 0$, et l'on écrit $f(z_0 + h) = a_0 + a_1 h + \dots$. Montrer :

$$\text{Rés}(\frac{f}{g}, z_0) = e_{n-1}$$

avec e_0, e_1, …, obtenus par la division suivant les puissances croissantes (comme dans les calculs de développement limités) :

$$\frac{a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \dots}{c_0 + c_1 h + c_2 h^2 + \dots} = e_0 + e_1 h + e_2 h^2 + \dots\ .$$

6.4 Soit $0 < a < b < c$ et soit C le cercle de rayon r centré en l'origine, parcouru dans le sens direct. Calculer $\int_C \frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)} dz$ selon la valeur de r. On donnera deux preuves, soit en utilisant le théorème des résidus, soit en décomposant en éléments simples.

6.5 Soit $\mathcal{R} = \{x_0 \le x \le x_1, y_0 \le y \le y_1\}$ un rectangle. En utilisant le théorème des résidus justifier la formule intégrale de Cauchy pour z dans l'intérieur du rectangle et f holomorphe sur le rectangle fermé :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathcal{R}} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

Démontrer ce résultat de manière plus simple, directement à partir du théorème de Cauchy-Goursat pour les fonctions holomorphes sur les rectangles, en utilisant la fonction $w \mapsto (f(w) - f(z))/(w - z)$ (et aussi la notion d'indice d'un lacet). Dans le cas où z est à l'**extérieur** du rectangle $\mathcal{R}$, que vaut $\int_{\partial\mathcal{R}} \frac{f(w)}{w-z} dw$?

6.6 Soit Ω un domaine, de bord orienté le cycle $\partial\Omega$, comme dans la version classique B du théorème des résidus dans le polycopié. Soit f une fonction holomorphe sur $\overline{\Omega}$, soient z_1 et z_2 deux points de Ω. Que vaut

$$\int_{\partial\Omega} \frac{f(z)\, dz}{(z - z_1)(z - z_2)}\ ?$$

Qu'obtient-on pour $z_2 \to z_1$, z_1 fixé ?

6.7 Que vaut, en fonction de $R > 0$:

$$\int_{|z|=R} \frac{dz}{2z^2 - 5z + 2}\ ?$$

On précisera les valeurs exclues de R.

6.8 Déterminer, C désignant tour à tour le cercle $|z - i| = 1$, ou le cercle $|z + i| = 1$, ou encore $|z| = 2$, parcourus dans le sens direct, les valeurs des intégrales :

$$\int_C \frac{1}{z^2 + 1}\, dz$$

Même question pour :

$$\int_C \frac{1}{z^3-1}\,dz \qquad \text{et} \qquad \int_C \frac{1}{z^4-1}\,dz \qquad \text{et} \qquad \int_C \frac{1}{z^5-1}\,dz$$

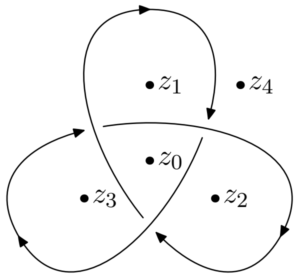
6.9 Que vaut $\int_{|z|=N} \operatorname{tg}(\pi z)\,dz$, pour $N \in \mathbf{N}$, $N \geq 1$?

6.10 Déterminer pour A, B, C réels, avec $A^2 > B^2 + C^2$ la valeur de

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{A + B\sin\theta + C\cos\theta}$$

On aura intérêt comme première étape à poser $B = R\cos\phi$, $C = R\sin\phi$, mais on peut aussi se frotter plus directement au résidu (utiliser bien sûr $z = e^{i\theta}$ ou dans ce genre).

6.11

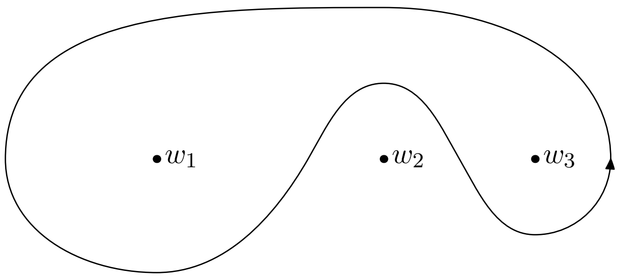


On considère dans le plan complexe un chemin fermé paramétré γ qui parcourt la figure ci-dessus dans le sens indiqué. Pour $j = 0, 1, 2, 3, 4$ on note

$$A_j = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z - z_j} \quad \text{et} \quad B_j = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{(z - z_j)^2}$$

Déterminer, en le justifiant, les valeurs de A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, et de B_0, B_1, B_2, B_3, B_4. On précisera aussi quel est le nom que l'on donne aux quantités données par les intégrales A_j, $j = 0 \ldots 4$.

6.12



Soit γ le contour, parcouru dans le sens direct, dessiné ci-dessus. Déterminer (avec justification) en fonction de w_1, w_2, w_3 les intégrales suivantes :

$$A = \int_\gamma \frac{dz}{(z - w_1)(z - w_2)(z - w_3)}$$

$$B = \int_\gamma \sin(z)dz$$

$$C = \int_\gamma \frac{dz}{(z - w_1)^2(z - w_3)}$$