Université Lille 1 — UFR de Mathématiques
Licence de Mathématiques (S5, année 2005–2006)

L305 : ANALYSE COMPLEXE

Responsable : Jean-François Burnol

FEUILLE DE TRAVAIL (2)

1

Dans ces exercices on est censé connaître (un peu) la notion de système de coordonnées (sur un ouvert du plan, donc nous aurons 2 coordonnées) et aussi ce que signifie une dérivée partielle par rapport à l'une ou l'autre des coordonnées d'un système.

1.1 Le Laplacien $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ est un opérateur différentiel qui joue un rôle important en analyse complexe. Soit $f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$ une fonction holomorphe sur un ouvert du plan complexe. On sait que f, donc u et v, admettent des dérivées partielles de tous les ordres. En utilisant les équations de Cauchy-Riemann, montrer que u et v vérifient l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

On dit d'une fonction vérifiant l'équation de Laplace qu'elle est harmonique. La fonction holomorphe $f = u+iv$ est aussi une fonction harmonique puisque $\Delta(f) = \Delta(u)+i\Delta(v) = 0$.

1.2 On veut exprimer les équations de Cauchy-Riemann avec les coordonnées polaires r et θ. Les équations de Cauchy-Riemann peuvent s'écrire sous la forme :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) F = 0$$

donc il s'agit d'exprimer $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ en fonction de $\frac{\partial}{\partial r}$ et de $\frac{\partial}{\partial \theta}$ lorsque l'on travaille sur un ouvert (ne contenant pas l'origine) sur lequel une détermination continue de l'argument θ est possible (par exemple sur $\Omega = \mathbf{C}\setminus]-\infty, 0]$). Montrer :

$$\frac{\partial}{\partial r} = \cos(\theta)\frac{\partial}{\partial x} + \sin(\theta)\frac{\partial}{\partial y}$$
$$\frac{\partial}{\partial \theta} = -r\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial x} + r\cos(\theta)\frac{\partial}{\partial y}$$

En déduire $\frac{\partial}{\partial x} = \cos(\theta)\frac{\partial}{\partial r} - \sin(\theta)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial}{\partial y} = \sin(\theta)\frac{\partial}{\partial r} + \cos(\theta)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$. Montrer alors :

$$\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} = e^{i\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r} + i\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) = e^{i\theta}\frac{1}{r}\left(r\frac{\partial}{\partial r} + i\frac{\partial}{\partial \theta}\right)$$

En déduire qu'en coordonnées polaires les équations de Cauchy-Riemann peuvent s'écrire (en particulier) sous la forme :

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = i\, r \frac{\partial F}{\partial r}$$

1.3 Il est intéressant que l'équation de l'exercice précédent $\frac{\partial F}{\partial \theta} = i\, r \frac{\partial F}{\partial r}$, peut se réécrire dans le système de coordonnées $(a, b) = (\log(r), \theta)$ sous la forme :

$$\frac{\partial F}{\partial b} = i \frac{\partial F}{\partial a} \ ,$$

autrement dit exactement sous la même forme qu'ont les équations de Cauchy-Riemann originelles dans les coordonnées cartésiennes (x, y).[1] Or a et b sont les parties réelles et imaginaires de la combinaison $a + ib$ qui est holomorphe comme fonction de $x + iy$: $a + ib = \log(x + iy)$. Montrer que cela est général : dans un système de coordonnées (a, b) telles que $w = a + ib$ est une fonction holomorphe de $z = x + iy$ les équations de Cauchy-Riemann pour l'holomorphie (par rapport à (x, y)) d'une fonction F sont $\frac{\partial F}{\partial b} = i\frac{\partial F}{\partial a}$ (ce qui équivaut à l'holomorphie de F comme fonction « sur le plan de $w = a + ib$ »[2]). Indication : prouver l'identité

$$\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} = \left(\frac{\partial a}{\partial x} - i\frac{\partial b}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial a} + i\frac{\partial}{\partial b}\right) \ ,$$

en exploitant les équations de Cauchy-Riemann $\frac{\partial b}{\partial x} = -\frac{\partial a}{\partial y}$, $\frac{\partial a}{\partial x} = +\frac{\partial b}{\partial y}$ pour $a + ib = g(x + iy)$.

1.4 On veut exprimer le Laplacien avec les coordonnées polaires r et θ : autrement dit pour toute fonction deux fois différentiable Φ on veut calculer la fonction $\Delta(\Phi)$ à l'aide des opérateurs de dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial r}$ et $\frac{\partial}{\partial \theta}$, lorsque l'on travaille sur un ouvert (ne contenant pas l'origine) dans lequel une détermination continue de l'argument θ est possible (par exemple sur $\Omega = \mathbf{C}\setminus]-\infty, 0]$). Une méthode possible est d'utiliser les expressions obtenues dans l'exercice **1.2**

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos(\theta)\frac{\partial}{\partial r} - \sin(\theta)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \qquad \frac{\partial}{\partial y} = \sin(\theta)\frac{\partial}{\partial r} + \cos(\theta)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \ ,$$

et de calculer ensuite $(\frac{\partial}{\partial x})^2$ et $(\frac{\partial}{\partial y})^2$ puis de faire la somme. Mais cela donne des calculs un peu longs. Voici une ruse : en reprenant une formule déjà établie dans **1.2** montrer

$$(x - iy)\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) = r\frac{\partial}{\partial r} + i\frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$(x + iy)\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) = r\frac{\partial}{\partial r} - i\frac{\partial}{\partial \theta}$$

On remarquera maintenant que l'opérateur différentiel $\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}$ appliqué à la fonction $x + iy$ donne zéro. Donc (expliquer !) :

$$(x - iy)\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(x + iy)\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) = (x - iy)(x + iy)\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

1. $\frac{\partial F}{\partial y} = i\frac{\partial F}{\partial x}$, ou, plus memnotechnique : $\frac{\partial F}{i\,\partial y} = \frac{\partial F}{\partial x}$ qui dit « holomorphe $\Leftrightarrow$ iy est comme x ».

2. autrement dit pour qu'une fonction soit holomorphe comme fonction de $x + iy$ il est nécessaire et suffisant qu'elle soit holomorphe comme fonction de $a + ib$. En particulier $x + iy$ est une fonction holomorphe de $a + ib$: on a donc prouvé que la réciproque d'une bijection holomorphe est aussi holomorphe. Nous reviendrons là-dessus avec d'autres méthodes (dont celle très concrète de l'« inversion » d'une série entière).

Prouver alors en conclusion :

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=\frac{1}{r^2}\left((r\frac{\partial}{\partial r})^2+\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\Phi=\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}$$

2

2.1 Soit $\gamma=[A,B]+[B,C]+[C,D]+[D,A]$ le bord (parcouru dans le sens direct) du carré de sommets $A=1-i$, $B=1+i$, $C=-1+i$, $D=-1-i$. Déterminer les intégrales suivantes :

1. $\int_\gamma dx$, $\int_\gamma x\,dx$, $\int_\gamma x^2\,dx$, $\int_\gamma y\,dx$, $\int_\gamma y^2\,dx$, $\int_\gamma y^3\,dx$,
2. $\int_\gamma x\,dx+y\,dy$, $\int_\gamma x\,dy+y\,dx$, $\int_\gamma x\,dy-y\,dx$,
3. $\int_\gamma dz$, $\int_\gamma z\,dz$, $\int_\gamma x\,dz$, $\int_\gamma z\,dx$,
4. $\int_\gamma z^{-1}\,dz$, $\int_\gamma z^{-2}\,dz$, $\int_\gamma z^n\,dz$, pour $n\in\mathbf{Z}$.

2.2 Avec les mêmes notations on veut évaluer $\int_\gamma \overline{z^n}\,dz$, $n\in\mathbf{Z}$. Justifier les étapes suivantes :

$$\int_\gamma \overline{z^n}\,dz=\overline{\int_\gamma z^n\,\overline{dz}}$$
$$\int_\gamma z^n\,\overline{dz}=\int_{[B,C]} z^n\,dz-\int_{[C,D]} z^n\,dz+\int_{[D,A]} z^n\,dz-\int_{[A,B]} z^n\,dz\ ,$$

et compléter le calcul, pour tout $n\in\mathbf{Z}$.

2.3 On note C le cercle de rayon 1 parcouru dans le sens direct. Calculer $\int_C z^n\,dz$ et $\int_\gamma z^n\,dz$ pour tout $n\in\mathbf{Z}$, et vérifier qu'il y a toujours égalité (ici $\gamma=\partial\mathcal{R}$ est à nouveau le bord du carré qui a été utilisé dans les exercices précédents). Calculer $\int_C \overline{z}^n\,dz$ et $\int_\gamma \overline{z}^n\,dz$ et trouver les cas d'égalités et d'inégalités.

2.4 Soit C un cercle de centre quelconque, parcouru dans le sens direct, et ne passant pas par l'origine. Calculer $\int_C z^n\,dz$ pour tout $n\in\mathbf{Z}$ dans le cas où C encercle l'origine, et dans le cas où C n'encercle pas l'origine. Indication pour $n=-1$: soit w l'affixe du centre du cercle, et R son rayon. Paramétrer le cercle par $z=w(1+\frac{R}{|w|}e^{i\theta})$, $-\pi<\theta\le+\pi$, puis utiliser un développement en série en distinguant les cas $R>|w|$ et $R<|w|$. Ou encore invoquer la fonction $\mathrm{Log}(z/w)$.

2.5 Soit $0<a<b$ sur l'axe réel positif et soit $C=\{|z|=r\}$ le cercle de rayon r centré en l'origine, parcouru dans le sens direct. Montrer :

$$\int_C \frac{1}{(z-a)(z-b)}\,dz=2\pi i\begin{cases}0 & r<a\\ \frac{1}{a-b} & a<r<b\\ 0 & r>b\end{cases}$$

On pourra réduire la fraction en élément simples, puis se ramener au résultat de l'exercice précédent. Ou encore, on pourra envisager des développements en séries, pour se ramener par étapes aux intégrales $\int_C z^n dz$, $n\in\mathbf{Z}$.

3

3.1 Soit C le cercle unité parcouru dans le sens direct. Calculer

$$\int_C \left(z+\frac{1}{z}\right)^n \frac{dz}{z} \quad (n \in \mathbf{N})$$

en développant par la formule du binôme et en utilisant les valeurs connues de $\int_C z^k dz$, $k \in \mathbf{Z}$. En déduire $\int_{-\pi}^{+\pi} \cos^n t\, dt$. En déduire la valeur de $\int_0^{\pi/2} \cos^n t\, dt$ pour n pair :

$$I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m} t\, dt = \frac{1.3.\cdots.(2m-1)}{2.4.\cdots.(2m)} \frac{\pi}{2}$$

3.2 On pose $J_m = \int_0^{\pi/2} \cos^{2m+1} t\, dt$, pour $m \in \mathbf{N}$. En intégrant par parties J_{m+1} obtenir la relation de récurrence $J_{m+1} = \frac{2m+2}{2m+3} J_m$ et prouver :[3]

$$J_m = \frac{2.4.\cdots.(2m)}{3.5.\cdots.(2m+1)}$$

3.3 En utilisant $I_{m+1} \leq J_m \leq I_m$, obtenir :

$$\frac{2m+1}{2m+2} \frac{(1.3.\cdots.(2m-1))(3.5.\cdots.(2m+1))}{(2.4.\cdots.(2m))^2} \leq \frac{2}{\pi} \leq \frac{(1.3.\cdots.(2m-1))(3.5.\cdots.(2m+1))}{(2.4.\cdots.(2m))^2}$$

En déduire la formule de Wallis :

$$\frac{2}{\pi} = \lim_{m\to\infty} \frac{1.3}{2.2}\frac{3.5}{4.4}\cdots\frac{(2m-1).(2m+1)}{(2m).(2m)} = \prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4m^2}\right)$$

3.4 Justifier le réarrangement suivant (qui découle aussi du terme de gauche dans l'inégalité de l'exercice précédent) : $\frac{2}{\pi} = \frac{1}{2}\frac{3.3.5.5....}{2.4.4.6....} = \frac{1}{2}\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(2m+1)^2}\right)^{-1}$, soit encore :

$$\frac{\pi}{4} = \prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(2m+1)^2}\right) .$$

3.5 Justifier également sur la base des formules précédentes les équivalents asymptotiques :

$$\binom{2m}{m} \sim_{m\to\infty} \frac{2^{2m}}{\sqrt{\pi m}}$$

$$\frac{(1+\frac{1}{2})(2+\frac{1}{2})\cdots(m+\frac{1}{2})}{1.2.\cdots.m} \sim 2\sqrt{\frac{m}{\pi}}$$

$$\frac{(\frac{1}{2})_m}{m!} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi m}}$$

3. par convention lorsque qu'un produit porte sur un ensemble vide il vaut 1. Donc la formule est bien compatible avec $J_0 = 1$. La remarque vaut aussi pour la formule précédente avec $I_0 = \pi/2$.