Université Lille 1 — UFR de Mathématiques
Licence de Mathématiques (S5, année 2005–2006)

L305 : ANALYSE COMPLEXE

Responsable : Jean-François Burnol

FEUILLE DE TRAVAIL (1)

1

1.1 Montrer que la fonction $f(z) = \frac{1}{z}$ est holomorphe sur $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ et vérifie $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$.

1.2 Si f et g sont deux fonctions dérivables au sens complexe au point z_0 montrer que $f+g$, $f-g$ et fg le sont et donner la valeur de leurs dérivées au point z_0.

1.3 Faites de même pour $\frac{f}{g}$ lorsque $g(z_0) \neq 0$.

1.4 Montrer la formule pour la dérivée d'une composition $g \circ f$.

1.5 Soit f et g deux fonctions n-fois dérivables au sens complexe sur un ouvert non vide U (remarque : d'après le cours il suffit qu'elles soient dérivables une fois sur U pour qu'elles le soient un nombre quelconque de fois). Montrer la formule de Leibniz généralisée :

$$\forall z \in U \qquad (fg)^{(n)}(z) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f^{(j)}(z) g^{(n-j)}(z)$$

1.6 On se donne deux séries entières $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ de rayons de convergences R_1 et R_2 non nuls. En utilisant le théorème sur les séries doubles prouver $f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ pour $|z| < R = \min(R_1, R_2)$ avec (formules dites de Cauchy) :

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$$

Le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ est-il toujours égal à $\min(R_1, R_2)$ ou peut-il être plus grand ?

1.7 Retrouver le résultat de l'exercice précédent de manière plus indirecte en montrant que les coefficients $c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$ sont ceux de la série de Taylor à l'origine de la fonction holomorphe $k(z) = f(z)g(z)$.

1.8 En quels points la fonction $z \mapsto \overline{z}$ est-elle dérivable au sens complexe, et/ou holomorphe ? Même question pour les fonctions $z \mapsto x$ et $z \mapsto y$.

1.9 Prouver qu'une fonction holomorphe sur un ouvert connexe dont la dérivée est identiquement nulle est constante. Et si l'ouvert n'est pas connexe ?

1.10 Sur un ouvert connexe U on se donne une fonction holomorphe f qui a la propriété de ne prendre que des valeurs réelles. En utilisant les équations de Cauchy-Riemann, montrer que f est constante.

2

Ces exercices proposent une variante pour développer la théorie de la fonction exponentielle.

2.1 On se donne une fonction f qui est dérivable au sens complexe $n+1$-fois sur le disque ouvert $D(0,R)$ (on sait qu'une fois suffit mais on ne va pas utiliser ce théorème difficile ici). Soit $z \in D(0,R)$. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral de Lagrange à la fonction de la variable réelle $t \mapsto g(t) = f(tz)$ pour $0 \leq t \leq 1$, prouver :

$$f(z) = f(0) + f'(0)z + \frac{f^{(2)}(0)}{2}z^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n + z^{n+1}\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(uz)\,du$$

2.2 (suite) On suppose que f est dérivable au sens complexe une fois sur $D(0,R)$ et vérifie $f' = f$ et $f(0) = 1$. Montrer que f est infiniment dérivable au sens complexe. En utilisant l'exercice précédent montrer

$$\left| f(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \right| \leq \Big(\sup_{|w|\leq|z|} |f(w)| \Big) \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}$$

et en déduire que pour tout z on a $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$.

2.3 Réciproquement on considère la fonction $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$. Vérifier que le rayon de convergence est infini. Établir par un calcul direct que $F'(0)$ existe et vaut 1. En utilisant le théorème sur les séries doubles, montrer $F(z+w) = F(z)F(w)$. En déduire ensuite que F est holomorphe sur $\mathbf{C}$ et vérifie $F' = F$.

3

3.1 Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Est-il exact que pour $|z| > R$ on a $\lim |a_n z^n| = \infty$?

3.2 Déterminer les séries de Taylor à l'origine de $\frac{1}{1-z}$, $\frac{1}{(1-z)^2}$, $\frac{1}{(1-z)^3}$, $\frac{1}{(1-z)^4}$.

3.3 Déterminer en tout $z_0 \neq 1$ la série de Taylor et son rayon de convergence pour la fonction analytique $\frac{1}{z-1}$.

3.4 Déterminer en tout $z_0 \neq 1,\ 2$ la série de Taylor et son rayon de convergence pour la fonction analytique $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$. On aura intérêt à réduire en éléments simples. De plus on demande d'indiquer le rayon de convergence *avant* de déterminer explicitement la série de Taylor.

3.5 Déterminer en tout point z_0 où elle est définie la série de Taylor de la fonction $\frac{1}{z^3-1}$. On déterminera son rayon de convergence en fonction de z_0.

3.6 On considère la série entière $\sum_{k=0}^{\infty} z^{2^k}$. Quel est son rayon de convergence ? On note $f(z)$ sa somme. Que vaut $\lim_{t\to 1} f(t)$? (on prend $0 < t < 1$; minorer f par ses sommes partielles). Plus généralement que vaut $\lim_{t\to 1} f(tw)$ (ici encore t est pris dans $]0,1[$), lorsque w vérifie une équation $w^{2^N} = 1$? En déduire qu'il est impossible de trouver un ouvert U connexe intersectant $D(0,1)$ mais non inclus entièrement dans $D(0,1)$ et une fonction holomorphe $g(z)$ sur U tels que $g = f$ sur $U \cap D(0,1)$. Pour tout $z_0 \in D(0,1)$ déterminer alors le rayon de convergence de la série de Taylor de f au point z_0.

3.7 Montrer que le rayon de convergence de chacune des séries concernées est 1 et prouver :

1. $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$ ne converge en aucun point du cercle $|z| = 1$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ converge en tout point du cercle $|z| = 1$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ converge en tout point du cercle $|z| = 1$ **sauf** en $z = 1$.

Pour ce dernier cas on définit $S_0 = 1$, $S_1 = 1+z$, $S_2 = 1+z+z^2$, ...(on pose aussi $S_{-1} = 0$). En écrivant $z^n = S_n - S_{n-1}$ exprimer $\sum_{n=1}^{N} \frac{z^n}{n}$ en fonction des S_n. Montrer que les S_n sont bornées lorsque $|z| = 1$, $z \neq 1$. Conclure.

3.8 Montrer qu'un entier $k \geq 1$ s'écrit de manière unique sous la forme $2^n(2m+1)$, $n \geq 0$, $m \geq 0$. Puis prouver pour $|z| < 1$:

$$\frac{z}{1-z^2} + \frac{z^2}{1-z^4} + \cdots + \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}} + \cdots = \frac{z}{1-z} \,.$$

On justifiera les interversions de séries. Prouver aussi :

$$\frac{z}{1+z} + \frac{2z^2}{1+z^2} + \cdots + \frac{2^n z^{2^n}}{1+z^{2^n}} + \cdots = \frac{z}{1-z} \,.$$

4

Lorsque z est complexe les fonctions $\sin(z)$, $\cos(z)$, $\mathrm{sh}(z)$ et $\mathrm{ch}(z)$ sont définies par les formules :

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \mathrm{sh}(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$
$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \mathrm{ch}(z) = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

4.1 Montrer que cos et ch sont des fonctions paires et sin et sh des fonctions impaires et donner leurs représentations comme séries entières. Prouver $e^{iz} = \cos(z)+i\sin(z)$, $\sin(iz) = i\,\mathrm{sh}(z)$, $\cos(iz) = \mathrm{ch}(z)$, $\mathrm{sh}(iz) = i\sin(z)$, $\mathrm{ch}(iz) = \cos(z)$.

4.2 Établir les formules :

$$\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$$

$$\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$$

en écrivant de deux manières différentes $e^{\pm i(z+w)}$. Donner une autre preuve en utilisant le principe du prolongement analytique et la validité (admise) des formules pour z et w réels.

4.3 Prouver pour tout z complexe $\cos(\pi + z) = -\cos(z)$, $\sin(\pi + z) = -\sin(z)$. Prouver $\cos(\frac{\pi}{2} - z) = \sin(z)$.

4.4 Prouver les formules $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ et $\mathrm{ch}^2 z - \mathrm{sh}^2 z = 1$ pour tout $z \in \mathbf{C}$.

4.5 Montrer $\sin(a+ib) = \sin(a)\,\mathrm{ch}(b) + i\cos(a)\,\mathrm{sh}(b)$. Puis en prenant dorénavant a et b réels, prouver :

$$a, b \in \mathbf{R} \implies \quad |\sin(a+ib)|^2 = \sin^2(a) + \mathrm{sh}^2(b)$$

Déterminer alors les nombres complexes $z = a + ib$ tels que $\sin(z) = 0$. Donner une autre preuve.

4.6 Montrer

$$a, b \in \mathbf{R} \implies \quad |\cos(a+ib)|^2 = \cos^2(a) + \mathrm{sh}^2(b) = \mathrm{ch}^2(b) - \sin^2(a)$$

Déterminer les nombres complexes z avec $\cos(z) = 0$.

5

Les fonctions de Bessel sont très importantes en Analyse. Elles apparaissent très souvent dans des problèmes de physique mathématique. L'analyse complexe permet d'étudier de manière approfondie ces fonctions. Ici nous nous contentons des tout débuts de la théorie. Nous ne considérons que les fonctions [1] J_0, J_1, J_2, ..., qui sont définies par les formules : [2]

$$\nu \in \mathbf{N}, z \in \mathbf{C} \qquad J_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\frac{z}{2})^{2n+\nu}}{n!(n+\nu)!}$$

5.1 Montrer que le rayon de convergence de la série définissant J_ν est $+\infty$.

5.2 En dérivant terme à terme prouver les formules :

$$\begin{aligned} (z^\nu J_\nu)' &= z^\nu J_{\nu-1} && (\nu \geq 1) \\ (z^{-\nu} J_\nu)' &= -z^{-\nu} J_{\nu+1} && (\nu \geq 0) \end{aligned}$$

En particulier on a $(zJ_1)' = zJ_0$ et $J_0^{'} = -J_1$.

5.3 Réécrire les équations précédentes sous la forme $(z\frac{d}{dz} + \nu)J_\nu = zJ_{\nu-1}$ $(\nu \geq 1)$ et $(z\frac{d}{dz} - \nu)J_\nu = -zJ_{\nu+1}$ $(\nu \geq 0)$ et en déduire $-(\frac{d}{dz} + \frac{\nu+1}{z})(\frac{d}{dz} - \frac{\nu}{z})J_\nu = J_\nu$, puis, après simplification, l'équation différentielle de Bessel :

$$z^2 J_\nu'' + zJ_\nu' + (z^2 - \nu^2)J_\nu = 0$$

5.4 Pour cette question, je devrais vous guider par des indications mais il n'y a plus la place sur cette page. Montrer pour tout $\nu \in \mathbf{N}$ que la série entière définissant J_ν est la seule (à une constante multiplicative près) qui donne une solution de l'équation différentielle de Bessel. [3]

1. dites « fonctions de Bessel de première espèce (et d'indices entiers) ».
2. Autrement dit :

$$J_\nu(z) = \frac{z^\nu}{2.4.\ldots.(2\nu)} \left(1 - \frac{z^2}{2.(2\nu+2)} + \frac{z^4}{2.4.(2\nu+2).(2\nu+4)} - \frac{z^6}{2.4.6.(2\nu+2).(2\nu+4).(2\nu+6)} + \ldots\right)$$

Remarquez que seule la constante $2.4.\ldots.(2\nu) = 2^\nu \nu!$ nous restreint (pour le moment) à des valeurs entières de ν. Si on en fait abstraction on obtient avec $\nu = -\frac{1}{2}$ la fonction $z^{-1/2}\cos(z)$ tandis qu'avec $\nu = +\frac{1}{2}$ on obtient $z^{-1/2}\sin(z)$. Les définitions exactes sont $J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos(z)$ et $J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin(z)$.

3. les autres solutions de l'équation différentielle sont singulières en $z = 0$, avec une composante logarithmique ($\nu \in \mathbf{Z}$). Pour $\nu \notin \mathbf{Z}$ il y a une solution en $z^\nu(\sum_{k\geq 0} c_k z^k)$ et une autre en $z^{-\nu}(\sum_{k\geq 0} d_k z^k)$.