Université Lille 1 — UFR de Mathématiques
305 – VARIABLES COMPLEXES

Examen du 6 janvier 2006
CORRIGÉ – CORRIGÉ
Ni documents ni calculatrices
Responsable : Jean-François Burnol

1 Exercice

Dans tout cet exercice $\mathcal{C}_R$ est le carré centré en l'origine et de côté $2R$, parcouru dans le sens direct.
1.1 Déterminer les singularités et les résidus de la fonction $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$.

corr.: Les singularités sont en 0, 1, 2, ce sont des pôles simples et $\text{Rés}(f,0) = \frac{1}{(-1)(-2)} = \frac{1}{2}$, $\text{Rés}(f,1) = \frac{1}{1(-1)} = -1$, $\text{Rés}(f,2) = \frac{1}{2\cdot 1} = \frac{1}{2}$.

1.2 (suite) Déterminer en fonction de $R > 0$ la valeur de $\int_{\mathcal{C}_R} f(z)\,dz$. Préciser les valeurs exclues de R.

corr.: Les valeurs exclues de R sont $R = 1$ et $R = 2$. Pour $0 < R < 1$ on a $\int_{\mathcal{C}_R} f(z)\,dz = 2\pi i\text{Rés}(f,0) = \pi i$. Pour $1 < R < 2$ on a $\int_{\mathcal{C}_R} f(z)\,dz = 2\pi i(\text{Rés}(f,0) + \text{Rés}(f,1)) = -\pi i$ et pour $R > 2$ on a $\int_{\mathcal{C}_R} f(z)\,dz = 2\pi i(\text{Rés}(f,0) + \text{Rés}(f,1) + \text{Rés}(f,2)) = 0$.

1.3 Déterminer les singularités et les résidus de la fonction $g(z) = \frac{1}{(z+1)^2(z-2)^2}$.

corr.: Singularités (pôles doubles) en -1 et $+2$. On a $\text{Rés}(g,-1) = \frac{\partial}{\partial z}\Big|_{z=-1} \frac{1}{(z-2)^2} = (-2)\frac{1}{(-3)^3} = \frac{2}{27}$. Le résidu à l'infini est nul car $|g(z)|$ décroît en $|z|^{-4}$ donc la somme des résidus à distance finie est nulle et $\text{Rés}(g,2) = -\frac{2}{27}$, ce que l'on confirme par $\text{Rés}(g,2) = \frac{\partial}{\partial z}\Big|_{z=2} \frac{1}{(z+1)^2} = (-2)\frac{1}{3^3} = -\frac{2}{27}$.

1.4 (suite) Déterminer en fonction de $R > 0$ la valeur de $\int_{\mathcal{C}_R} g(z)\,dz$.

corr.: Pour $0 < R < 1$ l'intégrale est nulle. Pour $1 < R < 2$ elle est égale à $2\pi i\text{Rés}(g,-1) = \frac{4\pi i}{27}$. Pour $R > 2$ l'intégrale est nulle car la somme des résidus est nulle.

1.5 Déterminer en fonction de $R > 0$ la valeur de $\int_{\mathcal{C}_R} \frac{z^2\sin(z)}{(z-\pi)^2}\,dz$.

corr.: Il y a une singularité en π qui est en fait un pôle simple puisque $\sin(z)$ a un zéro simple en π. Pour $R < \pi$ l'intégrale est nulle, pour $R > \pi$ l'intégrale vaut $2\pi i$ fois le résidu en π. Ce résidu vaut $\lim_{z\to\pi} \frac{z^2\sin(z)}{z-\pi} = \pi^2\sin'(\pi) = \pi^2\cos(\pi) = -\pi^2$. Donc pour $R > \pi$ l'intégrale vaut $-2i\pi^3$.

TOURNEZ LA PAGE

2 Exercice

2.1 Déterminer les racines de l'équation $z^4+4=0$.

corr.: $z^4+4=0 \iff (z^2=2i$ ou $z^2=-2i) \iff (z=\sqrt{2}e^{i\pi/4}=1+i$ ou $z=-\sqrt{2}e^{i\pi/4}=-1-i$ ou $z=\sqrt{2}e^{-i\pi/4}=1-i$ ou $z=-1+i)$. Les racines sont donc $1+i$, $-1+i$, $-1-i$, $1-i$.

2.2 Déterminer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^4+4}$.

corr.: Notons $z_1=1+i$, $z_2=-1+i$, $z_3=-1-i$, $z_4=1-i$. Soit $R>\sqrt{2}$ et notons $A(R)=\int_{-R}^{+R}\frac{dx}{x^4+4}$, notons $B(R)=\int_{z=Re^{i\theta},0\le\theta\le\pi}\frac{dz}{z^4+4}$. Par le théorème des résidus $A(R)+B(R)=2\pi i(\text{Rés}(\frac{1}{z^4+4},z_1)+\text{Rés}(\frac{1}{z^4+4},z_2))$. On a $\text{Rés}(\frac{1}{z^4+4},z_j)=(4z_j^3)^{-1}=\frac{z_j}{4z_j^4}=-\frac{1}{16}z_j$. Donc $A(R)+B(R)=-\frac{\pi i}{8}(z_1+z_2)=\frac{\pi}{4}$. Par ailleurs on a la majoration $|B(R)|\le\frac{\pi R}{R^4-4}$ donc $\lim_{R\to\infty}B(R)=0$. Donc $\lim_{R\to\infty}A(R)=\frac{\pi}{4}$, ce qui donne $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^4+4}=\frac{\pi}{4}$.

2.3 Déterminer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(x)\,dx}{x^4+4}$.

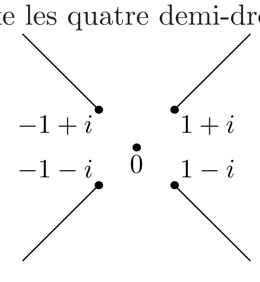
corr.: Notons J_1 l'intégrale demandée et $K_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}\,dx}{x^4+4}$ de sorte que $J_1=\text{Re}(K_1)$ (en fait $K_1=J_1$ car la partie imaginaire de K_1 correspond à l'intégrale d'une fonction impaire et est donc nulle). On calcule K_1 en posant $A_1(R)=\int_{-R}^{+R}\frac{e^{ix}\,dx}{x^4+4}$, $B_1(R)=\int_{z=Re^{i\theta},0\le\theta\le\pi}\frac{e^{iz}\,dz}{z^4+4}$. Comme $\text{Im}(z)\ge 0 \implies |e^{iz}|\le 1$ on a aussi $|B_1(R)|\le\frac{\pi R}{R^4-4}$ et $\lim_{R\to\infty}B_1(R)=0$. Donc $K_1=\lim_{R\to\infty}A_1(R)=\lim_{R\to\infty}(A_1(R)+B_1(R))=2\pi i(\text{Rés}(\frac{e^{iz}}{z^4+4},z_1)+\text{Rés}(\frac{e^{iz}}{z^4+4},z_2))=2\pi i\frac{-1}{16}(e^{iz_1}z_1+e^{iz_2}z_2)=\frac{-\pi i}{8}\frac{1}{e}(e^{i}(1+i)+e^{-i}(-1+i))=\frac{-\pi i}{8e}(2i\sin(1)+i2\cos(1))=\frac{\pi}{4e}(\cos(1)+\sin(1))$.

2.4 Déterminer $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{+R}\frac{x^3}{x^4+4}\sin(x)\,dx$.

corr.: Notons $J_2(R)=\int_{-R}^{+R}\frac{x^3}{x^4+4}\sin(x)\,dx$, et $A_2(R)=\int_{-R}^{+R}\frac{x^3}{x^4+4}e^{ix}\,dx$ de sorte que $J_2(R)=\text{Im}(A_2(R))$. Posons $B_2(R)=\int_{z=Re^{i\theta},0\le\theta\le\pi}\frac{z^3}{z^4+4}e^{iz}\,dz$ (toujours pour $R>\sqrt{2}$). Par le Lemme de Jordan on a $\lim_{R\to\infty}B_2(R)=0$. De plus $A_2(R)+B_2(R)=2\pi i(\text{Rés}(\frac{e^{iz}z^3}{z^4+4},z_1)+\text{Rés}(\frac{e^{iz}z^3}{z^4+4},z_2))=2\pi i\frac{1}{4}(e^{iz_1}+e^{iz_2})=\frac{\pi i}{2}(\exp(i-1)+\exp(-i-1))=\frac{\pi\cos(1)i}{e}$. Donc $\lim A_2(R)=\frac{\pi i}{e}\cos(1)$. Donc $\lim_{R\to\infty}J_2(R)=\frac{\pi}{e}\cos(1)$.

3 Exercice

On considère dans le plan complexe les quatre demi-droites indiquées ci-dessous :



et l'on désigne par U l'ouvert complémentaire dans $\mathbf{C}$ des demi-droites (et de leurs sommets).

3.1 Rappeler les définitions d'un ouvert connexe et d'un ouvert étoilé. L'ouvert U est-il connexe ? est-il étoilé ?

corr.: Un ouvert est connexe si deux points quelconques peuvent toujours être reliés par un chemin continu. Un ouvert est étoilé lorsque l'on peut trouver un point tel que le segment allant de ce point à tout autre de l'ouvert est entièrement inclus dans l'ouvert. L'ouvert U défini dans l'énoncé est étoilé par rapport à l'origine. Il est donc aussi connexe.

3.2 (suite) Que peut-on dire lorsque l'on a une fonction analytique g partout non nulle sur un ouvert étoilé ? (sans démonstration) Si sur un ouvert connexe on a deux fonctions analytiques f_1 et f_2 telles que $e^{f_1} = e^{f_2}$ que peut-on dire de $f_1 - f_2$? (sans démonstration)

corr.: Lorsqu'une fonction analytique g est partout non nulle sur un ouvert étoilé, on peut trouver une fonction analytique f sur cet ouvert telle que $g = \exp f$. Si, sur un ouvert connexe deux fonctions analytiques f_1 et f_2 sont telles que $e^{f_1} = e^{f_2}$, alors $f_1 - f_2$ est constante, elle vaut $2\pi ik$ pour un certain $k \in \mathbf{Z}$.

3.3 (suite) Prouver qu'il existe une unique fonction analytique f sur U telle que $\exp(f(z)) = z^4 + 4$ pour tout $z \in U$ et telle que $f(0) = 2\log(2)$.

corr.: L'ouvert U est étoilé et la fonction $z^4 + 4$ partout non nulle sur U donc il existe une fonction analytique f telle que $\exp(f(z)) = z^4 + 4$ pour tout $z \in U$. On aura $\exp(f(0)) = 4$ donc $f(0) = 2\log(2) + 2\pi ik$ pour un certain $k \in \mathbf{Z}$. Posons $f_1(z) = f(z) - 2\pi ik$ de sorte que $f_1(0) = 2\log 2$ et l'on a encore $\forall z \in U \ \exp(f_1(z)) = z^4 + 4$. Si l'on a une autre fonction f_2 vérifiant $\exp(f_2(z)) = z^4 + 4$, la différence $f_2 - f_1$ sera constante, donc si $f_2(0) = 2\log 2$ aussi, alors $f_2 = f_1$. La fonction f_1 est donc unique.

3.4 (suite) Soit D le disque ouvert centré en l'origine et de rayon $\sqrt{2}$. Quelle est l'image de ce disque ouvert par l'application analytique $z \mapsto z^4 + 4$? Justifier l'existence de la fonction composée $k(z) = \mathrm{Log}(z^4 + 4)$ sur D.

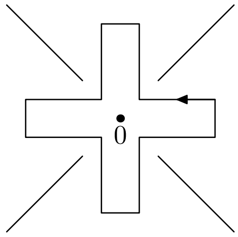
corr.: L'image du disque D par z^4 est le disque ouvert centré en l'origine de rayon $(\sqrt{2})^4 = 4$. L'image de D par $z \mapsto w = z^4 + 4$ est le disque ouvert de rayon 4 centré en 4. Cette image est donc incluse entièrement dans le demi-plan $\mathrm{Re}(w) > 0$ donc on peut utiliser la fonction $\mathrm{Log}(w)$ et on a l'existence de la fonction composée (analytique) $k(z) = \mathrm{Log}(z^4 + 4)$ sur D.

3.5 (suite) Prouver $f = k$ sur D. Donner la série de Taylor de f à l'origine. Quel est son rayon de convergence ?

corr.: Le disque D est connexe et sur ce disque on a $\exp(f) = \exp(k)$ donc $f - k$ est constante. Mais $k(0) = \mathrm{Log}\, 4 = 2\log 2$ donc $f = k$ sur D. Nous avons donc sur D : $f(z) = \mathrm{Log}(z^4 + 4) = \log 4 + \mathrm{Log}(1 + \frac{1}{4}z^4) = 2\log 2 + \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}\frac{1}{j}\left(\frac{z^4}{4}\right)^j = 2\log 2 + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j}\frac{1}{4^j}z^{4j}$. La série a son terme général qui tend vers zéro exactement lorsque $|z^4| < 4$, c'est-à-dire $|z| < \sqrt{2}$. Le rayon de convergence est donc $\sqrt{2}$.

3.6 On considère le lacet γ, formant le contour ci-dessous, parcouru dans le sens direct.

TOURNEZ LA PAGE



Déterminer en fonction de $n \in \mathbf{Z}$ la valeur de $\int_\gamma f(z) z^{-n-1}\, dz$.

corr.: La seule singularité est en $z = 0$ donc l'intégrale vaut $2\pi i \text{Rés}(\frac{f(z)}{z^{n+1}}, 0)$. Le résidu est égal au coefficient de z^{-1} dans la série de Laurent de $f(z) z^{-n-1}$ à l'origine donc aussi au coefficient de z^n dans la série de Taylor de $f(z)$ à l'origine. Donc si $n < 0$ ou si n n'est pas un multiple de 4 l'intégrale est nulle. Pour $n = 0$ l'intégrale vaut $2\pi i 2 \log 2$. Pour $n = 4j$, $j \geq 1$, l'intégrale vaut $2\pi i \frac{(-1)^{j-1}}{j} \frac{1}{4^j}$.

4 Exercice

On considère $f(z) = \frac{1}{7} z^7 - \frac{1}{2} z^4 + z - \frac{9}{14}$. Calculer f', déterminer les racines de f' et leurs multiplicités. Vérifier $f(1) = 0$. Quelle est la multiplicité de 1 comme racine de f ? Montrer que les autres racines sont simples. Soit $\epsilon > 0$. On considère le lacet γ_ϵ, qui parcourt, dans le sens direct, $z = 1 + \epsilon e^{i\theta}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq +\frac{\pi}{2}$, puis le segment $[1 + i\epsilon, i\epsilon]$, puis $z = \epsilon e^{i\theta}$, $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 3\frac{\pi}{2}$, puis le segment $[-i\epsilon, 1 - i\epsilon]$. Montrer que quel que soit $Z \in \mathbf{C}$, pour tout $\epsilon > 0$ suffisamment petit, $f \circ \gamma_\epsilon$ ne passe pas par Z. Si de plus $Z \notin [-\frac{9}{14}, 0]$ alors $\text{Ind}(f \circ \gamma_\epsilon, Z) = 0$; si $Z \in [-\frac{9}{14}, 0[$, $\text{Ind}(f \circ \gamma_\epsilon, Z) = 1$; et pour $Z = 0 = f(1)$: $\text{Ind}(f \circ \gamma_\epsilon, f(1)) = 3$. En déduire qu'il existe, pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit, au moins un z sur le support de γ_ϵ avec $f(z) \in]-\frac{9}{14}, 0[$ et aussi qu'il existe sur le support de γ_ϵ $z_1 \neq z_2$ avec $f(z_1) = f(z_2)$.

corr.: On a $f'(z) = z^6 - 2z^3 + 1 = (z^3 - 1)^2$. Ses racines sont doubles, et ce sont 1, $j = \exp(2\pi i/3)$, $j^2 = \bar{j} = j^{-1} = \exp(4\pi i/3)$. On a $f(1) = \frac{1}{7} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{9}{14} = \frac{2-7+14-9}{14} = 0$. Donc 1 est racine triple de f. On a $f(j) = (\frac{1}{7} - \frac{1}{2} + 1)j - \frac{9}{14} \neq 0$ et aussi $f(\bar{j}) \neq 0$. Il n'y a donc pas d'autres racines communes entre f et f'. Les quatre racines de f autres que 1 sont donc simples. Soit $Z \in \mathbf{C}$; il y a au plus sept nombres complexes z_1, z_2, …, z_7 envoyés par f sur Z. Si z_j est sur $[0, 1]$ alors il n'est pas sur le contour γ_ϵ. Notons $\delta(Z) \in]0, +\infty]$ la distance minimale au segment $[0, 1]$ pour ceux des z_j qui ne sont pas sur le segment $[0, 1]$. Alors pour $0 < \epsilon < \delta(Z)$ aucun des z_j n'est sur le contour et donc $f \circ \gamma_\epsilon$ ne passe pas par Z. Sur le segment $0 \leq z \leq 1$ la fonction f est à valeurs réelles, et elle est strictement croissante donc $f([0, 1]) = [f(0), f(1)] = [-\frac{9}{14}, 0]$. Donc si $Z \notin [-\frac{9}{14}, 0]$ alors pour $\epsilon < \delta(Z)$ le contour γ_ϵ ne contient dans son intérieur aucune solution de l'équation $f(z) = Z$. Ainsi $\text{Ind}(f \circ \gamma_\epsilon, Z) = 0$. Par contre si $Z \in [-\frac{9}{14}, 0]$, $\text{Ind}(f \circ \gamma_\epsilon, Z)$ est (pour $\epsilon < \delta(Z)$) égal au nombre de solutions, avec multiplicité, de $f(x) = Z$, $0 \leq x \leq 1$. Comme f' ne s'annule pour ces x que pour $x = 1$, cela donne donc un indice de 1 pour $Z \in [-\frac{9}{14}, 0[$ et de 3 pour $Z = 0$. Si $f \circ \gamma_\epsilon$ ne coupait pas l'intervalle $]-\frac{9}{14}, 0[$ on pourrait déformer continûment $-\frac{9}{14}$ en 0 sans couper $f \circ \gamma_\epsilon$ et l'indice devrait rester constant, or il vaut 1 pour $Z = -\frac{9}{14}$ et 3 pour $Z = 0$. Donc, nécessairement $f \circ \gamma_\epsilon$ passe par cet intervalle ouvert. Si f était injective sur γ_ϵ le composé serait un contour de Jordan, et les indices par rapport aux points du complémentaire ne prendraient que les seules valeurs 0 et 1 (si sens direct) ou -1 (si sens rétrograde). Or on a vu $\text{Ind}(f \circ \gamma_\epsilon, 0) = 3$ (pour ϵ petit).